UNIDAD DIDÁCTICA TERCERA: APLICACIÓN DEL CALCULO MERCANTIL Y FINANCIERO A LAS OPERACIONES BANCARIAS

UNIDAD DE TRABAJO SEXTA Y SÉPTIMA: RENTAS Y PRÉSTAMOS.

Conceptos (contenidos soporte)	Procedimientos (contenidos organizadores)	Actividades de enseñanza-aprendizaje	Actividades de evaluación
➢ **Unidad de trabajo sexta:** ♦ Generalidades. ♦ Rentas anuales constantes. ♦ Rentas constantes fraccionadas. ♦ Rentas variables. ➢ **Unidad de trabajo séptima** ♦ Generalidades. ♦ Amortización de un préstamo por el sistema francés. ♦ Amortización de préstamos mediante cuotas de amortización constantes.	♦ Definición del concepto de renta diferenciando el valor actual del final y enumeración de las distintas clasificaciones de rentas. ♦ Relación existente entre el concepto de renta con la formación del capital en algunos tipos de seguros y del capital final en los préstamos. ♦ Utilización de las fórmulas y tablas relativas al cálculo de la cuota de amortización de préstamos (amortizables con cuotas de amortización constantes) distinguiendo anualidad de cuota de amortización.	♦ Realización de ejercicios prácticos sobre cuotas de amortización de préstamos, anualidad, intereses, capital final y T.A.E basándose en el manejo de tablas de coeficientes y fórmulas para el cálculo abreviado. ♦ Cálculo de intereses basándose en anuncios de prensa, folletos de banco, etc. ♦ Búsqueda y obtención, por grupos de alumnos, de la información expuesta en las oficinas bancarias sobre: ▪ Las condiciones que aplican los bancos a sus clientes en las operaciones de préstamos. ▪ Los distintos tipos de interés (nominal, preferencial, T.A.E. ♦ Estudio y análisis de la información anterior. ♦ Debate y puesta en común sobre los tipos de interés aplicados por los bancos en sus operaciones de préstamo. ♦ Utilización de programas informáticos para la realización de los cálculos relativos a préstamos.	♦ Presentación de en un cuaderno, de los ejercicios propuestos ya resueltos. ♦ Contestación oral a preguntas realizadas basándose en los ejercicios presentados por cada alumno (resueltos en las actividades de enseñanza-aprendizaje). ♦ Resolución de cuestiones sobre: ▪ La terminología específica aparecida en esta Unidad. ▪ Interpretación de las incógnitas que aparecen en las fórmulas. ♦ Realización de ejercicios sobre el cálculo de las distintas variables que componen la fórmula del interés compuesto mediante la aplicación directa y el uso de tablas financieras. ♦ Presentación de un informe en el que se comparan los distintos tipos de interés y condiciones aplicadas por diferentes entidades bancarias en sus operaciones.

UNIDAD DE TRABAJO 6º

RENTAS

1. GENERALIDADES:

A. Concepto de renta:

Una renta es un conjunto de capitales financieros con vencimientos equidistantes de tiempo.

El concepto de renta exige por tanto:

- La existencia de **varios capitales.**
- Que los **vencimientos** sean **equidistantes,** es decir que los capitales venzan cada año, cada mes, cada trimestre, cada dos años, etc., pero siempre con la misma periodicidad.

B. Elementos de una renta:

- **Términos:** Son los capitales. ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ... α_n)
- **Origen:** Es la fecha de comienzo de la renta.
- **Período:** Tiempo transcurrido entre dos términos consecutivos. α_1————α_2
- **Duración:** Es el tiempo que pasa entre el momento de constitución de una renta y la efectividad del último término; en el ejemplo 2º, es el tiempo transcurrido entre 0 y n.
- **Época de valoración:** Es el momento en que se calcula el valor de la renta.
- **Interés:** Es el rédito, tasa de interés, de la operación financiera.

En la vida práctica aparecen con frecuencia distintos casos de rentas, de los que proponemos algunos ejemplos a continuación.

Ejemplos:

Ejemplo 1º: Si alquilamos una casa y debemos pagar al comienzo de cada mes 601,01 € en concepto de alquiler, estamos en el caso de una renta que podríamos representar gráficamente de la forma:

601,01	**601,01**	**601,01**	**…**	**601,01**	**601,01**
0	**1 mes**	**2 meses**	**…**	**n-1 meses**	**n meses**

Así se ve que tenemos varios capitales que tienen vencimientos equidistantes, puesto que cada mes vence uno de ellos.

Ejemplo 2º: Si tengo concertada una póliza de seguro de vida y cada año pago una prima de 180,30 €, estamos también en el caso de una renta que podríamos representar gráficamente de la forma:

180,30	**180,30**	**180,30**	**…**	**180,30**
0	**1 año**	**2 años**	**…**	**n-1 años**

Y como en el caso anterior tenemos varios capitales y tienen vencimientos equidistantes, en este caso cada año vence uno de ellos.

Ejemplo 3º: Me contratan hoy en una empresa que me pagará al final de cada mes 1.382,33 € en concepto de sueldo, su representación gráfica será:

1.382,32 1.382,32 … 1.382,32 1.382,32

0 1 mes 2 meses … n-1 meses n meses

Y como en el caso anterior tenemos varios capitales y tienen vencimientos equidistantes, en este caso cada mes vence uno de ellos.

Ejemplo 4º: Me conceden hoy un préstamo para comprar una vivienda y tengo que pagar al final de cada semestre, durante 10 años, 4.086,88, venciendo el primer pago a los 2 años de concedido el préstamo. La representación gráfica de dichos pagos será:

4.086,88 ... 4.086,88 4.086,88 4.086,88

0 1 2 3 4 … 21 22 23 semestres

Y como en el caso anterior tenemos varios capitales y tienen vencimientos equidistantes, en este caso cada semestre vence uno de ellos y el primer pago deferido a 3 años (4 semestres) desde la concesión del préstamo.

Ejemplo 5º: Contrato con una institución un Plan de pensiones al que aportaré, al final de este año, 1.202 €, al final del segundo año 1.202 (1,05), al final del tercer año 1.202 $(1,05)^2$, y así sucesivamente, durante 10 años. La representación gráfica será:

1.202 1.202 (1,05) … 1.202 $(1,05)^9$

0 1 2 … 10 años

Y como en el caso anterior tenemos varios capitales y tienen vencimientos equidistantes, en este caso cada año vence uno de ellos.

Ejemplo 6º: Un Club de recreo cuenta con 1.000 socios que pagan al inal de cada año una cuota de 73 €. Cada año el número de socios aumenta en 100, hasta que llegue a tener 1.500 socios. La representación gráfica de los ingresos que se van a generar por cuotas será:

73 x 1000 73 x 1000 ... 73 x 1400 73 x 1500

0 1 2 … 5 6 años

Ejemplo 7º: Una institución cultural ofrece un premio de 1.803 € cada tres años para un concurso literario. Si piensa concederlo durante 15 años, su representación gráfica será:

1.803 1.803 ... 1.803

0 1 2 3 4 5 6 ... 15 años

Ejemplo 8º: Una finca produce unos ingresos de 2.405 € al final de cada año, por tiempo indefinido. Su representación gráfica será:

2.405 2.405 … 2.405

0 1 2 … ∞ años

Existe en la práctica multitud de ejemplos que tienen las dos condiciones.

C. <u>Clasificación de las rentas</u>:

Las rentas pueden clasificarse del siguiente modo:

1) **Dependiendo de la naturaleza del término,** o dicho de otra forma, **según la naturaleza de los capitales que la componen,:**

a) **Constantes:** Cuando todos los términos son iguales entre sí, es decir, todos los capitales tienen la misma cuantía, como hemos visto en los ejemplos 1, 2, 3 y 4 anteriores..

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n$$

b) **Variables:** cuando los términos de la renta no son iguales entre sí, es decir, los capitales son distintos unos respecto de otros. La variación puede seguir un orden preestablecido o no, destacando las siguientes:

(a) **Rentas variables en progresión aritmética.** Un caso de este tipo de renta la hemos visto en el ejemplo 6 anterior.

(b) **Rentas variables en progresión geométrica.** Un caso de este tipo de renta la hemos visto en el ejemplo 5 del punto anterior.

2) **Según la periodicidad del vencimiento:**

a) **Anuales:** Los capitales vencen cada año. O dicho de otra forma, cuando el período es un año, como hemos visto en los ejemplos 2, 5 y 6 del punto anterior.

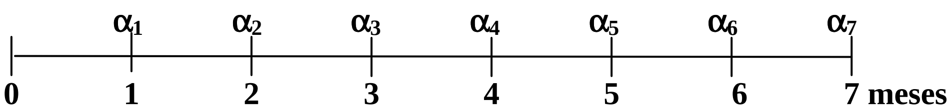
b) **Fraccionadas:** Los capitales vencen con periodicidad inferior al año. O dicho de otra forma, el período es inferior a un año, como hemos visto en los ejemplos 1 y 3 del punto anterior. Ejemplo: renta mensual, trimestral, etc.

c) **Con periodicidad superior al año:** El tiempo que transcurre entre vencimiento y vencimiento es mayor que el año, como hemos visto en el ejemplo 7 del punto anterior. O dicho de otra forma, el período es mayor de un año. Ejemplo: renta bianual, trianual, etc.

3) **Por el número de términos que la componen,** o dicho de otra forma, **en función de la duración de la renta:**

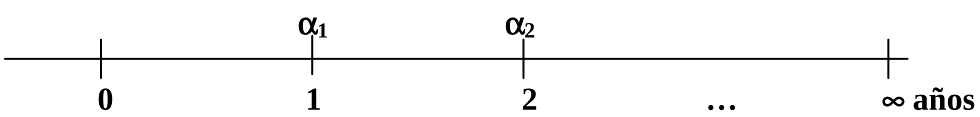
a) **Temporales:** Cuando la renta tiene un número finito de términos y su duración finita. Por ejemplo, la adquisición de un bien se hace con compromiso de pago en 7 mensualidades, 14 años, etc.

Gráficamente:



b) **Perpetua:** Cuando la renta tiene infinitos términos y su duración por tanto ilimitada. Es el caso de una finca que produce una renta siempre, aunque el propietario pueda cambiar. O el de la Deuda Perpetua del Estado, que produce un interés a perpetuidad.

Gráficamente:



4) **Por el vencimiento de los pagos:**

a) **Prepagable:** cuando primero se paga, y luego se recibe la contraprestación. (O primero se cobra, y luego se entrega la contraprestación). Ejemplos:

- Se alquila una casa, se paga el alquiler al comienzo del mes y, a cambio, se usa durante ese mes.
- Se contrata un seguro para el coche, primero se paga y luego se está cubierto por el seguro durante el año.

En los casos de renta prepagable, el momento final de la renta no coincide con el último pago, como se puede apreciar en los gráficos de los ejemplos 1 y 2 del punto anterior.

b) **Pospagables:** Cuando el pago se realiza por vencido, es decir, al final del período. En estos casos, primero se realiza la contraprestación, y luego se efectúa el pago. Ejemplos:

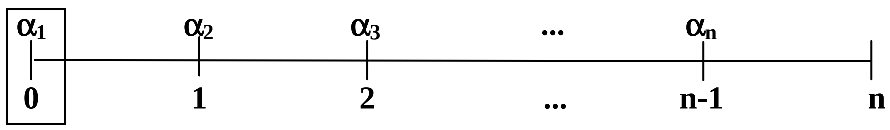
- Una empresa contrata a un trabajador, éste trabaja durante un mes, y al final de ese período le pagan el sueldo.
- Pido un préstamo en una entidad financiera, que me lo concede, y lo devuelvo entregando una cantidad determinada al final de cada mes, durante varios años.
- Un agricultor entrega la uva a la cooperativa, y se le pagan transcurrido 2, 4 y 6 meses, a partes iguales.

En los casos de renta pospagable, el momento final de la renta coincide con el último pago, como se puede apreciar en los gráficos de los ejemplos 3 y 4 del punto anterior.

5) **Por el vencimiento del primer pago:**

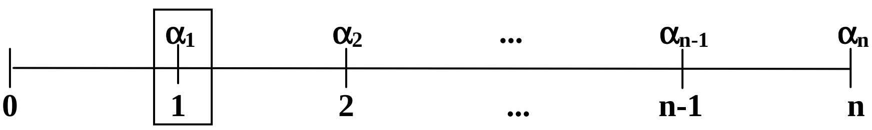
a) **Inmediata Prepagable:** Aquella renta cuyo primer pago tiene lugar en el momento de la constitución de la renta (es decir, en el momento cero). Son inmediatas prepagables, por ejemplo, el alquiler del piso, el seguro del coche, etc. Se paga por adelantado.

Gráficamente:



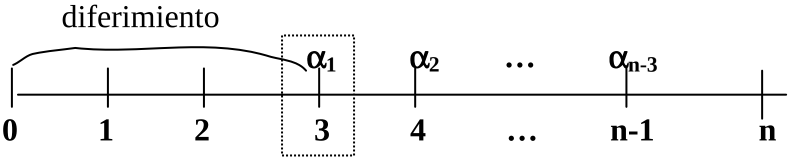
b) **Inmediata pospagables:** Son aquellas rentas cuyo primer pago tiene lugar al finalizar el período en el que se constituye la renta (es decir, en el momento uno). Es inmediata pospagable, por ejemplo, la que hemos visto del sueldo que percibe el trabajador.

Gráficamente:



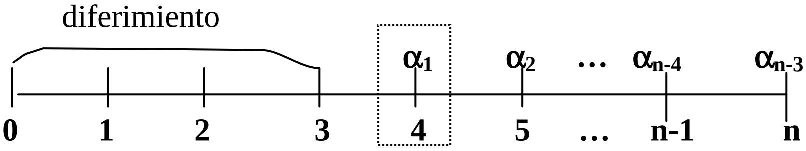
c) **Diferida Prepagable:** aquella renta cuyo primer pago tiene lugar en el momento en el que se cumple el diferimiento, y cada pago se hace por adelantado. Por ejemplo, se contrata el 1 de octubre el alquiler de una lonja que comenzará a usarse el 1 de enero, y por la que se pagarán 722 € mensuales, al comienzo de cada mes, a partir de esa fecha.

Gráficamente:



d) **Diferida Pospagable:** Aquella renta diferida, cuyo primer pago tiene lugar al finalizar el periodo siguiente al diferimiento. Por ejemplo, el caso anterior pero que la mensualidad se paga al final de cada mes.

Gráficamente:



6) **Por el régimen utilizado en su valoración:**

a) **Rentas en capitalización simple.**

b) **Rentas en capitalización compuesta.**

De todo lo dicho sobre la clasificación de las rentas podemos presentar el siguiente cuadro resumen:

CLASIFICACIÓN DE LAS RENTAS

POR LA NATURALEZA DE SUS TERMINOS (1)	**POR LA PERIODICIDAD DEL VENCIMIENTO (2)**	**POR EL NÚMERO DE TÉRMINOS (3)**	**POR EL VENCIMIENTO DE LOS PAGOS (4)**	**POR EL VENCIMIENTO DE PRIMER PAGO (5)**	**POR EL RÉGIMEN DE VALORACIÓN (6)**
♦ Constantes ♦ Variables	♦ Anuales ♦ Fraccionadas ♦ Con periodicidad superior al año.	♦ Temporales ♦ Perpetuas	♦ Pospagables ♦ Prepagables	♦ Inmediatas prepagable. ♦ Inmediata pospagable. ♦ Diferidas prepagable ♦ Diferida pospagable.	♦ En capitalización simple ♦ En capitalización compuesta.

A la vista del cuadro se desprende que son muchas las combinaciones que pueden hacerse atendiendo a los seis criterios de la clasificación, ya que toda renta tiene una característica de cada una de ellos.

No obstante, de todas las posibles combinaciones que se pueden realizar destaca por su importancia la renta que es: **“Constante, Anual, Inmediata, pospagable, Temporal y en capitalización Compuesta”.**

Hasta tal punto que es la que se va a tratar en primer lugar y como estudio general básico de las rentas.

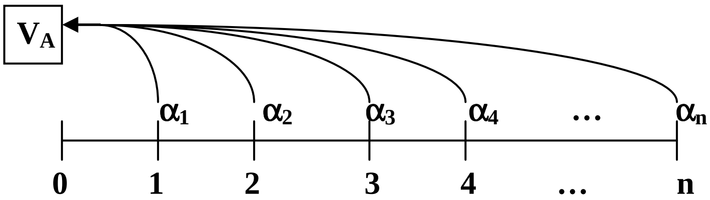
D. <u>Consideraciones generales de las rentas</u>:

El primer problema que se nos plantea ante cualquier tipo de renta es el cálculo de su valor actual y de su valor final.

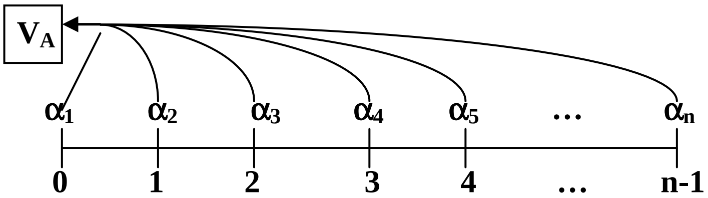
- **El valor actual** de una renta es la suma del valor de todos sus capitales referidos al momento de constitución de la renta (momento cero).
- **El valor final** de una renta es la suma del valor de todos sus capitales referidos al momento final de la duración de la renta (momento n)

<u>Ejemplos gráficos</u>:

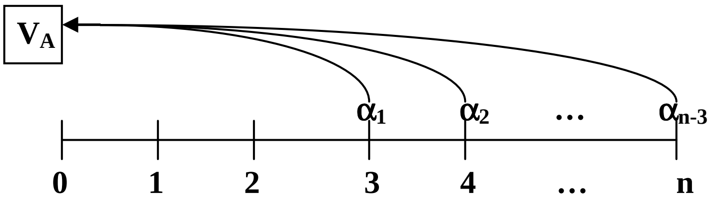
- **<u>El valor actual</u>:**



Valor actual de una renta inmediata pospagable

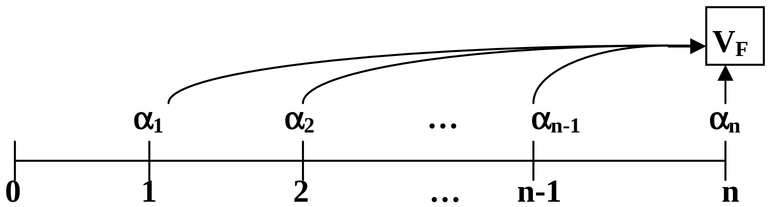


Valor actual de una renta inmediata prepagable

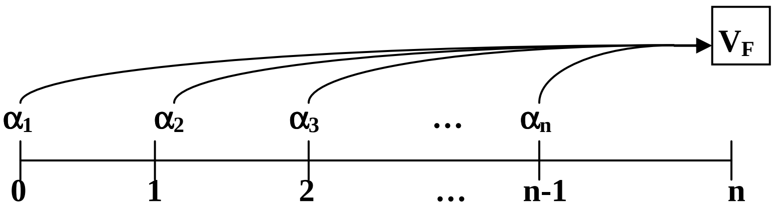


Valor actual de una renta diferida prepagable

- **<u>El valor final</u>:**



Valor actual de una renta inmediata pospagable



Valor actual de una renta inmediata prepagable

La representación gráfica de cada problema que se trate es muy importante para facilitar su solución.

2. RENTAS ANUALES CONSTANTES:

A. Introducción:

Por su importancia práctica vamos a comenzar el estudio de las rentas considerando en primer lugar una renta “Anual, constante, inmediata pospagable, temporal y en capitalización compuesta”.

Quiere ello decir que:

- Los capitales vencen cada año **(anual).**
- La cuantía de dichos capitales es siempre la misma **(constante).**
- El primer vencimiento tiene lugar al finalizar el período en el que se constituye la renta **(pospagable)** (si la renta se constituye hoy –momento cero-, y es anual, el primer vencimiento tiene lugar trascurrido el primer año –momento uno-).
- La duración de la renta es **“n”** años **(temporal).**
- Su valoración se hará -como siempre a lo largo de todo el estudio de las rentas- a **interés compuesto.**

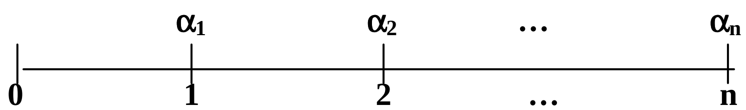
B. Anualidad:

Las *anualidades* son pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo (de un año) que se llaman intervalos de pago.

Cuando el pago de la anualidad se efectúa al final del intervalo de pago, se llama como ya hemos visto *anualidad pospagable*; y si se efectúa al principio del intervalo de pago, se llama *anualidad prepagable*.

C. Valor actual de una renta anual constante, inmediata pospagable de *n* términos:

Sean **α_1, α_2, …, α_n** el conjunto de **“n”** capitales que vencen al cabo de **1, 2, …, n** años respectivamente, y que podemos representar gráficamente de la forma:



Valor actual de una renta inmediata pospagable

¿Cuál será su valor actual? Será el valor de todos los capitales **α_1, α_2, …, α_n** referido al momento cero.

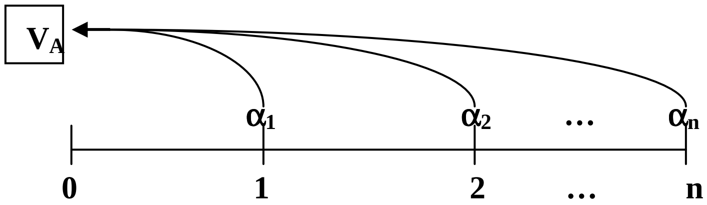
¿Cómo trasladaremos cada capital a dicho momento? Lógicamente, actualizando cada uno de los capitales hasta dicho momento, al tanto de interés compuesto anual **“i”**, utilizando para ello como sabemos el **factor de actualización $(1+i)^{-n}$.**

De esta forma resulta:

$$V_A = \alpha_1(1+i)^{-1} + \alpha_2(1+i)^{-2} + ... + \alpha_n(1+i)^{-n} \qquad (1)$$

Siendo $V_A = V_o$

Gráficamente:



Valor actual de una renta inmediata pospagable

Como se puede apreciarse, cada capital se actualiza por el tiempo que media entre su vencimiento y el momento cero.

Ahora bien, dado que hemos partido de que todos los capitales son iguales, y que llamaremos "**α**"

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$$

la expresión (1) quedará:

$$V_A = \alpha\ (1+i)^{-1} + \alpha\ (1+i)^{-2} + \ldots + \alpha\ (1+i)^{-n}$$

y sacando factor común a α resulta:

$$\boldsymbol{V_A = \alpha\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n}\right]}$$

La suma que aparece dentro del corchete puede expresarse de la forma:

$$\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

que no es sino la **suma de los términos de una progresión geométrica** en la que:

- Número de términos: **"n"**
- Primer término: $\frac{1}{(1+i)}$
- Último término: $\frac{1}{(1+i)^n}$
- Razón de la progresión: $\frac{1}{(1+i)}$

Observemos que la razón es menor que la unidad, por lo que la progresión es decreciente.

Recordemos por matemáticas que la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente se obtiene mediante la expresión: $S = \frac{\alpha_1 - \alpha_n r}{1-r}$

Y aplicándola a nuestros datos calculemos el valor del corchete:

$$\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$S = \frac{\frac{1}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{1}{(1+i)}}{1 - \frac{1}{(1+i)}}$$

Sacando factor común en el numerador a $\frac{1}{(1+i)}$ nos queda:

$$S = \frac{\frac{1}{1+i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right]}{1-\frac{1}{(1+i)}}$$

Poniendo ahora denominadores común en el numerador y en el denominador:

$$S = \frac{\frac{1}{(1+i)}\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right]}{\frac{1+i-1}{1+i}} = \frac{\frac{1}{(1+i)}\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right]}{\frac{i}{1+i}}$$

Multiplicando numerador y denominador por (1+i) resulta:

$$S = \frac{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}}{i}$$

de donde :

$$\mathrm{S} = \frac{\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Hemos llegado por tanto a que:

$$\left[(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\ldots+(1+\mathrm{i})^{-n}\right] = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

de donde resulta que el valor actual que tratábamos de buscar es:

$$\boxed{V_A = \alpha \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Expresión que nos da el ***valor actual de una renta anual constante "α" de "n" términos, valorada al tanto unitario de interés compuesto anual "i".***

En el caso de que **α = 1**, el valor actual de dicha renta será:

$$V_A = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Expresión que nos determina el ***valor actual de una renta unitaria anual constante de "n" términos, valorada al tanto unitario de interés compuesto anual "i".***

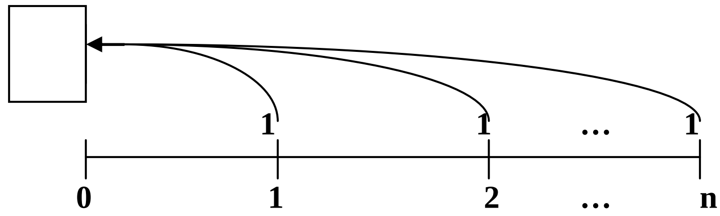
Y de acuerdo con la simbología de las matemáticas financieras, a dicha expresión la de signamos como

Es decir:

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

siendo el subíndice **"n"** el número de términos que componen la renta y el subíndice **"i"** el tanto de interés compuesto utilizado para la valoración.

La representación gráfica de será:



Hemos encontrado ya el **factor de actualización** de una renta constante anual, que nos servirá para desplazar el conjunto de los capitales de una sola vez, en lugar de hacerlo separadamente para cada capital.

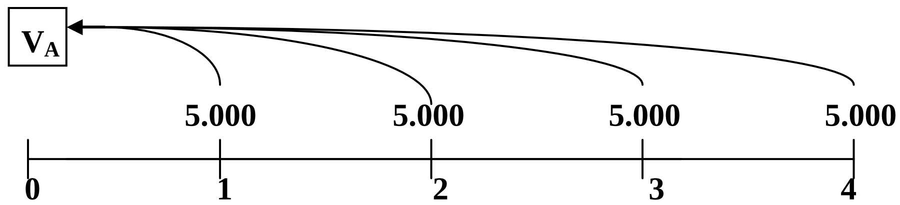
Por tanto, el valor actual de la renta que nos ocupa será:

$$\boxed{V_A = \alpha \cdot}$$

Ejemplos:

Ejemplo 1º: Calcular el valor de una renta anual, constante, de 4 términos de 5.000 € cada uno, valorada al 6% de interés compuesto anual.
Solución:

Gráficamente:



Valor actual de una renta inmediata pospagable

El problema se podría resolver de dos maneras distintas:
1º Forma:

$$V_A = \alpha_1 (1+i)^{-1} + \alpha_2 (1+i)^{-2} + ... + \alpha_n (1+i)^{-n} =$$

$$5000(1'06)^{-1} + 5000(1'06)^{-2} + 5000(1'06)^{-3} + 5000(1'06)^{-4} = 17325'53 \text{ €.}$$

2º Forma:

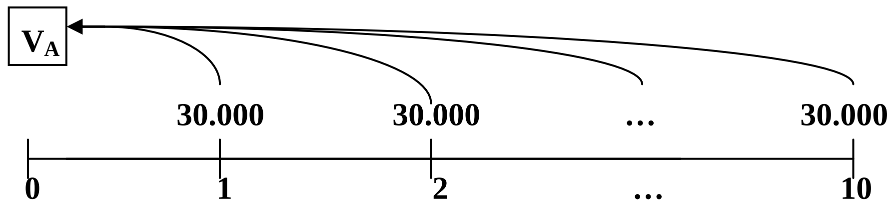
$$V_A = \alpha \cdot \quad =$$

$$\alpha \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 5000 \frac{1-(1'06)^{-4}}{0'06} = 17325'53€$$

Ejemplo 2º: El Sr. A debe pagarle al Sr. B. 30.000 € al final de cada año durante 10 años, y le propone sustituir dichos pagos por uno solo.

¿Cuánto deberá pagar hoy A y B para que no exista lesión de intereses para ninguno de los dos, si se considera un tanto para la valoración de la renta del 5’25% de interés compuesto anual?.
Solución:

Gráficamente:



Valor actual de una renta inmediata pospagable

Partiendo de que: $V_A = \alpha$

Sustituyendo los datos, resulta:

$$V_A = \alpha \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 30000 \cdot \frac{1-(1+0'0525)^{-10}}{0'0525} = 228865'21\ €.$$

D. Cálculo de la anualidad:

Si en la expresión $V_A = \alpha$

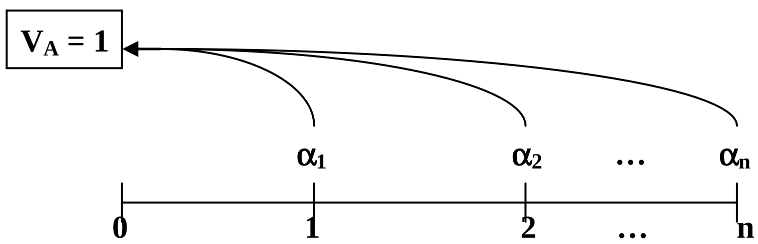
Bastará despejar α de la expresión anterior y resultará: $\alpha = \frac{V_A}{\ }$

Si el valor actual es igual a la unidad, $V_A = 1$, el valor de α será:

$$\alpha = \frac{1}{\ } =$$

que es el **valor de la anualidad que amortiza un préstamo de una unidad monetaria a un tanto de interés i, en función del número de términos n.**

Gráficamente:



El valor de la expresión:

$$\frac{1}{\ _{n\ i}} \qquad \textit{o bien} \qquad {}^{-1}_{n\ i}$$

viene ya determinado para distintos valores de **n** y distintos valores de **i** en la **Tabla IV: Anualidad constante que amortiza un préstamo de una unidad a interés compuesto.**

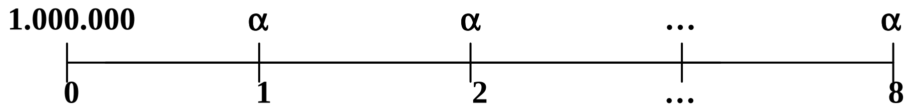
Ejemplos:

Ejemplo 1º: Nos concede hoy una entidad bancaria un préstamo de un millón de euros al 9% de interés compuesto anual, y nos exige la devolución del mismo en 8 pagos iguales a realizar al final de cada uno de los 8 años siguientes a la concesión del préstamo.

¿Cuál será el valor de cada anualidad?

Solución:

Gráficamente:



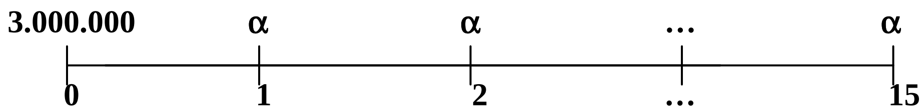
Por tanto:

$$\alpha = V_A \cdot \qquad = V_A \cdot \frac{1}{\frac{1-(1+i)^{-8}}{i}} = 1000000 \cdot \frac{1}{\frac{1-(1+0'09)^{-8}}{0'09}} = 180674'38 \text{ €.}$$

Ejemplo 2º: ¿Cuál será la anualidad de una renta de 15 términos si su valor actuar es de 3.000.000 € valorada al 8% de interés compuesto anual?

Solución:

Gráficamente:



Por tanto:

$$\alpha = V_A \cdot \qquad = V_A \cdot \frac{1}{\frac{1-(1+i)^{-15}}{i}} = 3000000 \cdot \frac{1}{\frac{1-(1+0'08)^{-15}}{0'08}} = 350488'63 \text{ €.}$$

E. **Cálculo del tanto:**

Supongamos conocido el valor actual de una renta de **n** términos de cuantía **α.**

¿Cómo podremos calcular el tanto de interés al que se valoró?

El valor actual de la renta es: $\mathbf{V_A = \alpha}$

Expresión en la que conocemos $\mathbf{V_A}$, **α** y **n.**

Despejando resulta: $= \frac{V_a}{\alpha}$

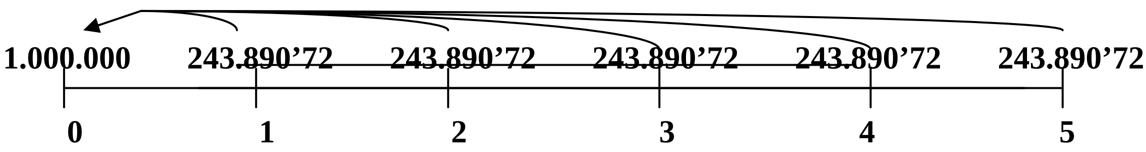
expresión que nos indica que el valor actual de una renta unitaria de **n** términos es igual a un valor conocido $\mathbf{V_A / \alpha}$

Con ayuda de las tabla (III) podemos calcular el valor de **i** bien de forma inmediata, bien por interpolación.

Ejemplos:

Ejemplo 1º: Calcular el tanto de interés compuesto anual al que nos han prestado un millón de euros si hemos de amortizarlo mediante 5 anualidades a 243.890’72 € cada una.
Solución:

Gráficamente:

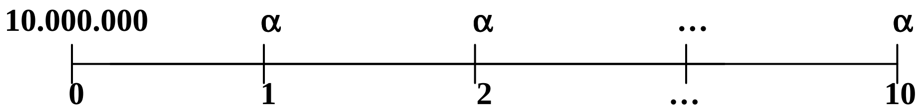


Por tanto:

$$V_A = \alpha \cdot \qquad \Rightarrow \qquad = \frac{V_A}{\alpha} = \frac{1000000}{243890'72} = 4'100197$$

Buscando en la Tabla III en la fila a 5 términos encontramos el valor 4’100197 en la columna del 7% siendo esa la solución que buscamos.

Ejemplo 2º: Una máquina cuesta al contado 10.000.000 €, pero nos permiten pagarlo mediante 10 pagos anuales postpagables de 1.523.077 € cada uno. Calcular el tanto de interés compuesto anual al que nos resulta la financiación de forma aplazada.
Solución:
Gráficamente:



Por tanto:

$$V_A = \alpha \cdot \qquad \Rightarrow \qquad = \frac{V_A}{\alpha} = \frac{10000000}{1523077} = 6'565656$$

Buscando en la Tabla III encontramos en la fila correspondiente a 10 términos:

Al 9% ……….. 6’417658
Al 8% ……….. 6’710081
- 0’292423
Al 8% ……….. 6’710081
6’565656
x% = 0’144425

luego el tanto que buscamos estará comprendido entre el 8 y el 9% y diremos:

A una diferencia de 1% ………… - 0’292423
A una diferencia de x% ………… -0’144425

(Observemos que a medida que aumenta el tanto, el valor anual es menor, por lo que las diferencias resultan negativas)

De donde:

$$x = \frac{-0'111125}{-0'292423} = 0'493890$$

Luego el tanto buscado será **8’493890%**

F. **Cálculo del número de términos:**

i. **Caso de número entero de términos:**

Se puede hacer de dos maneras:

1º Forma:

$$V_A = \alpha \cdot$$

De donde :

$$= \frac{V_A}{\alpha}$$

expresión en la que conocemos $\mathbf{V_A}$**, i** y **α.**

Buscando en la Tabla III el valor del cociente **V_A/α** en la columna del tanto **i**, nos determinará el número de términos buscados, bien de forma inmediata, bien por interpolación.

2º Forma:

$$V_A = \alpha \cdot \qquad = \alpha \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow \frac{V_A}{\alpha} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow \frac{V_A \cdot i}{\alpha} = 1-(1+i)^{-n} \; (\times -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{V_A \cdot i}{\alpha} = -1 + (1+i)^{-n} \Rightarrow -\frac{V_A \cdot i}{\alpha} + 1 = (1+i)^{-n} \Rightarrow \mathrm{Log}\left(-\frac{V_A \cdot i}{\alpha} + 1\right) = -n \cdot Log(1+i) \Rightarrow$$

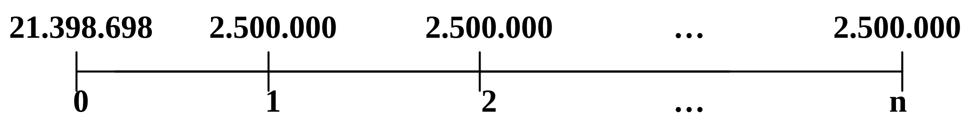
$$-\mathrm{n} = \frac{\mathrm{Log}\left(-\frac{V_A \cdot i}{\alpha} + 1\right)}{Log(1+i)}$$

Ejemplos:

Ejemplo 1º: Para comprar una máquina cuyo conste al contado es de 21.398.698 €, una institución financiera nos concede un préstamo de ese importe, para amortizar mediante una renta anual, inmediata, postpagable, de 2.500.000 €. Si el tanto de la operación es de 8% de interés compuesto anual, ¿cuántas anualidades habrá que pagar para amortizar dicho préstamo?.

Solución:

Gráficamente:



1º Forma:

Por tanto:

$$\boldsymbol{V_A = \alpha \cdot \qquad \Rightarrow \qquad = \frac{V_A}{\alpha} = \frac{21398698}{2500000} = 8'5594792}$$

Buscando en la Tabla III en la columna 8% encontramos para n =15 el valor 8'559479 siendo esa la solución que buscamos: **n = 15 términos,** es decir que se deberá hacer 15 pagos anuales de 2.500.000 € para cancelar el préstamo concedido.

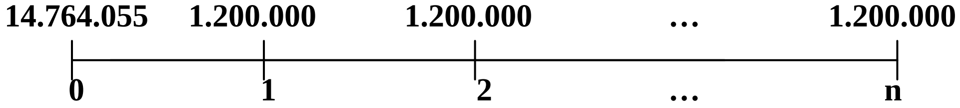
2º Forma: Aplicando la fórmula:

$$\boldsymbol{-n = \frac{Log\left(-\frac{V_A \cdot i}{\alpha} + 1\right)}{Log(1+i)} = \frac{Log\left(-\frac{21398698 \times 0'08}{2500000} + 1\right)}{Log(1+0'08)} = \frac{Log\ 0'315241664}{Log\ 1'08} = -\ 15\ \textit{términos.}}$$

Ejemplo 2º: Una persona tiene, en el momento de su jubilación, un capital de 14.764.055 €. Si las deposita en una institución financiera para que ésta le entregue al final de cada año 1.200.000 €, ¿cuántas anualidades tendrá derecho a percibir si el tanto de valoración es el 6% de interés compuesto anual?

Solución:

Gráficamente:



1º Forma:

$$V_A = \alpha \cdot \qquad \Rightarrow \qquad = \frac{V_A}{\alpha} = \frac{14764055}{1200000} = 12'3033791667$$

Buscando en la Tabla III en la columna del 6% encontramos para n = 23 el valor 12’303379, lo que nos indica que dicha persona tendrá derecho a percibir **23 anualidades** de 1.200.000 € cada una.

2º Forma:

$$-n = \frac{Log\left(-\frac{V_A \cdot i}{\alpha}+1\right)}{Log\left(1+i\right)} = \frac{Log\left(-\frac{14764055 \times 0'06}{1200000}+1\right)}{Log\left(1+0'06\right)} = \frac{Log\ 0'26179725}{Log\ 1'06} = -\ 23\ términos.$$

NOTA IMPORTANTE:

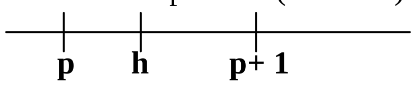
En todos estos ejemplos se ha cumplido la condición, la premisa, de que siempre ha de cumplirse que el valor actual de la renta sea igual a la suma de los valores actuales de todos sus términos.

ii. Caso de número no entero de términos:

Puede suceder que el número de términos no sea entero sino que esté comprendido entre **p** y **p + 1,** por lo que se hace necesaria la interpolación, que se realizará de forma similar a como hemos hecho en otras ocasiones anteriores.

Supongamos que el valor de ***n*** obtenido de la interpolación es:

n = p + h (0 < h <1)

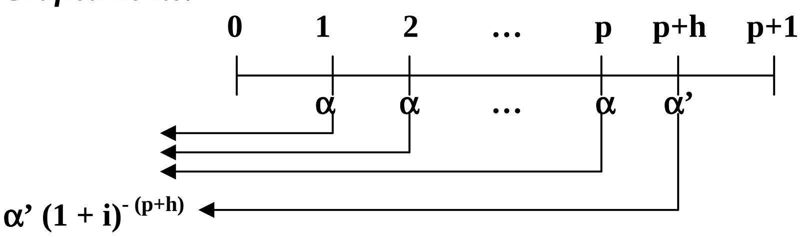


Esto nos indica que la renta se compone de **p** anualidades de valor α con vencimiento en el momento **1, 2, ..., p,** más una cantidad **α’** con vencimiento en el momento **p + h,** siendo la cuantía de **α’** el resultado de multiplicar **α por h.**

Así, si el resultado de un ejercicio es n = 3,5, implica que deberá pagarse 3 anualidades enteras en los momentos 1, 2 y 3, y media en el momento 3,5.

Si el resultado es de n = 6,25 habrá que pagar 6 anualidades en los momentos 1 al 6, y 0,25 de la anualidad en el momento 6,25.

Gráficamente:



<u>Financieramente</u>: (Calculo del valor α').

$$V_A = \alpha \qquad\qquad + \ \alpha' \ (1 + i)^{-(p+h)}$$

<u>Vamos a trata de demostrar que la cuantía de **α'** es el producto **α.h**</u>

Como el valor actual debe ser el mismo en las expresiones:

$$V_A = \alpha \qquad \text{o bien} \qquad V_A = \alpha$$

y

$$V_A = \alpha \qquad + \alpha' \ (1 + i)^{-(p+h)}$$

igualándolas resulta:

$$\alpha \qquad = \alpha \qquad + \ \alpha' \ (1 + i)^{-(p+h)}$$

que puesto en forma desarrollada es:

$$\alpha \cdot \frac{1-(1+i)^{-(p+h}}{i} = \alpha \frac{1-(1+i)^{-p}}{i} + \alpha'(1+i)^{-(p+h)}$$

Agrupando los términos en **α** y sacando factor común:

$$\alpha \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-(p+h)}}{i} - \frac{1-(1+i)^{-p}}{i} \right] = \alpha' \cdot (1+i)^{-(p+h)}$$

Quitando denominadores dentro del corchete y resolviendo nos queda:

$$\alpha \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-(p+h)} - 1 + (1+i)^{-p}}{i} \right] = \alpha' \cdot (1+i)^{-(p+h)} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha \cdot \frac{-(1+i)^{-(p+h)} + (1+i)^{-p}}{i} = \alpha' \cdot (1+i)^{-(p+h)}$$

$$\alpha \cdot \frac{-(1+i)^{-(p+h)} + (1+i)^{-p}}{(1+i)^{-(p+h)}} = \alpha' \cdot i \Rightarrow \alpha \cdot \left(\frac{-(1+i)^{-(p+h)}}{(1+i)^{-(p+h)}} + \frac{(1+i)^{-p}}{(1+i)^{-(p+h)}} \right) = \alpha' \cdot i \Rightarrow \alpha\left(-1 + (1+\mathrm{i})^{h}\right) = \alpha' \cdot i$$

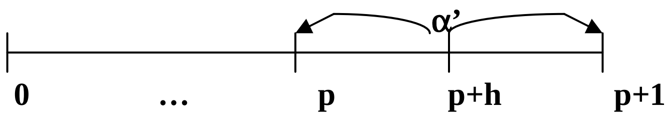
Dado que **h** es inferior al año, (0<h<1), aplicando el convenio lineal la igualdad anterior resulta: **α(-1+1+i.h) = i.α'.** De donde: **α.i.h = i.α'**. Y dividiendo ambos miembros por **i** <u>resulta: **α' = hα**</u>, como queríamos demostrar, correspondiendo a **α'** un vencimiento **p+h.**

$$\boxed{\alpha' = \alpha \cdot h}$$

Puede ocurrir, no obstante, que se desee **<u>anticipar o retrasar el pago de α'</u>** al momento **p** o al momento **p+1** respectivamente.

En este caso, y para que se mantenga la equivalencia financiera, <u>deberemos actualizar o capitalizar dicho importe</u> al tanto de interés **i** durante el tiempo que se actualiza o capitaliza.

Gráficamente:



Y en uno u otro caso, como el tiempo es menor que la unidad, aplicaremos el convenio lineal, es decir, consideraremos la operación, **para este desplazamiento,** a interés simple.

Por tanto, <u>si actualizamos</u> **α'** al momento **p**, su valor en ese momento será: $\boxed{\alpha' \cdot \frac{1}{1+i \cdot h}}$

Y <u>si se capitaliza</u> **α'** al momento **p+1**, su valor en ese momento será: $\boxed{\alpha' \cdot [1 + i \cdot (1-h)]}$

Ejemplos:

Ejemplo 1º: Depositamos hoy en una entidad bancaria un capital de 1.000.000 € y esta se compromete a entregarnos al final de cada año 110.000 € Si el tipo de interés de la operación es de 4%, se pide:

a) Cuantas anualidades tendremos derecho a percibir, y en qué momento recibiremos el último pago (α') y por qué cuantía.

b) Considerando que el último pago (α') queremos recibirlo junto con la última anualidad α, determinar que cantidad cobraremos en ese momento.

c) Suponiendo que queremos que transcurra un año entre la última anualidad y el pago final, determinar la cuantía que cobraremos en ese momento por dicho pago.

Soluciones:

Solución caso a)

Por tanto:

$$V_A = \alpha \cdot \qquad \Rightarrow \qquad = \frac{V_A}{\alpha} = \frac{1000000}{110000} = 9'090909$$

Buscando en la Tabla III encontramos en la columna del 4%:

Para 11 términos ……….. 8'760477
Para 12 términos ……….. 9'385074
- 0'624597
Para 11 términos ……….. 8'760477
9'090909
h término = 0'330432

luego el tanto que buscamos estará comprendido entre el término 11 y 12 y diremos:

A una diferencia de 1 año ………… - 0'624597
A una diferencia de h ………… - 0'330432

De donde:

$$h = \frac{-0'330432}{-0'624597} = 0'52903232 \text{ años}$$

Es decir que el vencimiento de α' es 11'52903232 años después del momento cero.

0'52903232 x 12 = 6'34838784, es decir, 6 meses.
0'34838784 x 30 = 10'4516352, es decir, 10 días.

P + h = 11'52903232 años = 11 años, 6 meses y 10 días

Gráficamente:

1.000.000 110.000 110.000 … 110.000 α'

0 1 2 … 11 11 + h 12

Para determinar el valor de α' basta multiplicar α por **h** y resulta:

α' = 110.000 x 0'52903232 = 58.193,555 ≅ **58.193,56 €**

Solución caso b)

Como en este caso se trata de anticipar el pago de **α'** del momento 11,52903232 al momento 11 para acumulárselo a la anualidad **α** con vencimiento en ese momento. Y dado que **h** es inferior al año, actualizando el valor de **α'** por dicho tiempo a interés simple resulta:

Valor de **α'** en ese momento $p = \alpha' \cdot \frac{1}{1 + i \cdot h}$ y sustituyendo resulta:

$$\textbf{\textit{Valor de }} \boldsymbol{\alpha'} \textbf{\textit{ en }} \boldsymbol{p = \alpha' \cdot \frac{1}{1 + i \cdot h} = 58193{,}56 \frac{1}{1 + 0'04.0{,}52903232} = 56987{,}628 \cong 56987{,}63} \text{ €.}$$

cantidad que habrá de sumar a 110.000 € para cobrarlas juntas en el momento 11.

Gráficamente:

1.000.000	110.000	110.000	…	56.987'63 + 110.000	α'	
0	1	2	…	11	11 + h	12

Solución caso c)

En este caso se trata de retrasar el pago de **α'** del momento 11'52903232 al momento 12. El tiempo que se retrasa es por tanto: 12 – 11'52903232 = 0'47096768 años

Valor de **α'** en ese momento $p + 1 = \alpha' \cdot [1 + i \cdot (1 - h)]$ y sustituyendo resulta:

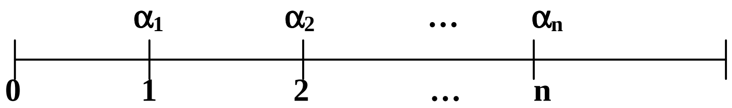
$$\textbf{\textit{Valor de }} \boldsymbol{\alpha'} \textbf{\textit{ en }} \boldsymbol{p + 1 = \alpha' \cdot [1 + i \cdot (1 - h)] = 58193'56(1 + 0'04(12 - 11.52903232)) = 59289.85} \text{ €.}$$

Gráficamente:

1.000.000	110.000	110.000	…	110.000	α'	→ 59.289'85
0	1	2	…	11	11 + h	12

G. <u>Valor final de una renta anual, constante, inmediata, pospagable de *n* términos</u>:

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ el conjunto de **"n"** capitales que vencen al cabo de **1, 2, …, n** años respectivamente, y que podemos representar gráficamente de la forma:



Valor final de una renta inmediata pospagable

¿Cuál será su valor final? Será el valor de todos los capitales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ referido al momento **n**, o al momento último de la duración de la renta.

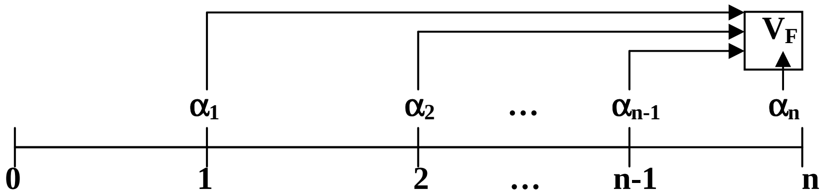
¿Cómo trasladaremos cada capital a dicho momento? Lógicamente, capitalizando cada uno de los capitales hasta dicho momento, al tanto de interés compuesto anual **"i"**, utilizando para ello como sabemos el **factor de capitalización $(1+i)^n$.**

De esta forma resulta:

$$V_F = \alpha_1 (1+i)^{n-1} + \alpha_2 (1+i)^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} (1+i)^{n-(n-1)} + \alpha_n (1+i)^{n-n} \qquad (1)$$

Siendo $V_F = V_n$

Gráficamente:



Valor final de una renta inmediata pospagable

Ahora bien, dado que hemos partido de que todos los capitales son iguales, y que llamaremos "α"

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$$

la expresión (1) valor final quedará:

$$V_F = \alpha\ (1+i)^{n-1} + \alpha\ (1+i)^{n-2} + \ldots + \alpha\ (1+i)^1 + \alpha \cdot (1+i)^0$$

y sacando factor común a α resulta:

$$V_F = \alpha\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)\ + 1\right]$$

Que podemos también expresar como:

$$V_F = \alpha\left[1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right]$$

Como podemos observar, el corchete ahora contiene la **suma de los términos de una progresión geométrica** creciente en la que:

- Número de términos: **"n"**
- Primer término: **1**
- Último término: $(1+i)^{n-1}$
- Razón de la progresión: $(1+i)$

Recordemos por matemáticas que la suma de los términos de una progresión geométrica creciente se obtiene mediante la expresión: $S = \frac{\alpha_n \cdot r - \alpha_1}{r-1}$

Y aplicándola a nuestros datos calculemos el valor del corchete:

$$\left[1 + (1+i) + ... + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right]$$

$$\mathrm{S} = \frac{(1+i)^{n-1}(1+i) - 1}{(1+i) - 1}$$

Realizando operaciones se obtiene:

$$S = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

de donde resulta que el valor final que tratábamos de buscar es:

$$\boxed{V_F = \alpha \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Expresión que nos da el ***valor final de una renta anual constante "α" de "n" términos, valorada al tanto unitario de interés compuesto anual "i".***

En el caso de que **α = 1**, el valor actual de dicha renta será:

$$V_A = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Expresión que nos determina el ***valor final de una renta unitaria anual constante de "n" términos, valorada al tanto unitario de interés compuesto anual "i".***

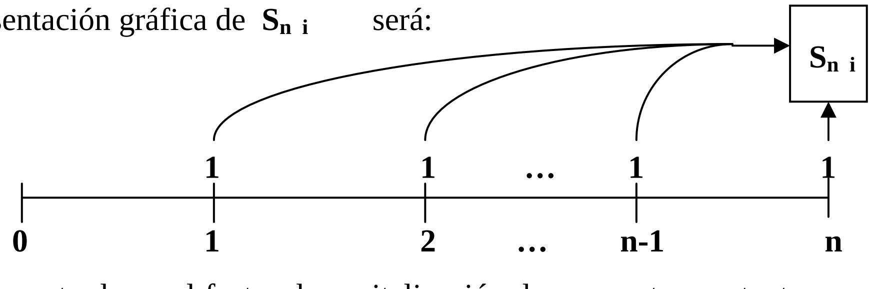
Y de acuerdo con la simbología de las matemáticas financieras, a dicha expresión la de signamos como $\mathbf{S_{n\ i}}$

Es decir:

$$\boxed{S_{n\ \mathrm{i}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

siendo el subíndice **"n"** el número de términos que componen la renta y el subíndice **"i"** el tanto de interés compuesto utilizado para la valoración.

La representación gráfica de $\mathbf{S_{n\ i}}$ será:



Hemos encontrado ya el factor de capitalización de una renta constante anual, que nos servirá para desplazar el conjunto de los capitales de una sola vez, en lugar de hacerlo separadamente para cada capital.

Por tanto, el valor final de la renta que nos ocupa será:

$$\boxed{V_F = \alpha \cdot \cdot S_{n\ \mathrm{i}}}$$

i. Otras formas de calcular el valor final:

No obstante de lo anterior, cabe también la posibilidad de calcular el valor final de la renta de la siguiente manera:

- **Calculando previamente su valor actual, y capitalizando después el valor obtenido hasta el momento n.**

$$\mathrm{V_F} = V_A (1+i)^n \quad (1)$$

Recuérdese que el valor actual era : $\mathrm{V_A} = \alpha \cdot \quad = \alpha \cdot \dfrac{1 - (1+\mathrm{i})^{-n}}{i}$

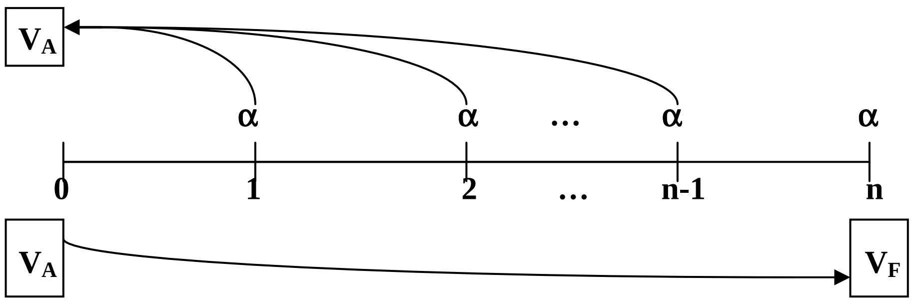
Sustituyendo en (1) $\mathrm{V_A}$ por su valor resultará : $\mathrm{V_F} = \alpha \cdot \dfrac{1 - (1+\mathrm{i})^{-n}}{i}(1+i)^n$

y simplificando :

$$\mathrm{V_F} = \alpha \cdot \frac{1 - (1+\mathrm{i})^{-n}}{i}(1+i)^n = \alpha \frac{\left[1 - (1+\mathrm{i})^{-n}\right](1+i)^n}{i} = \alpha \frac{(1+\mathrm{i})^n - \left[(1+i)^{-n}(1+i)^n\right]}{\mathrm{i}} = \alpha \frac{(1+i)^n - (1+i)^0}{i} =$$

$$\mathrm{V_F} = \alpha \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \rightarrow \text{expresión igual a la obtenida anteriormente.}$$

Gráficamente:



Así pues, concluiremos que para calcular el valor final de una renta puede hacerse de 3 formas diferentes:

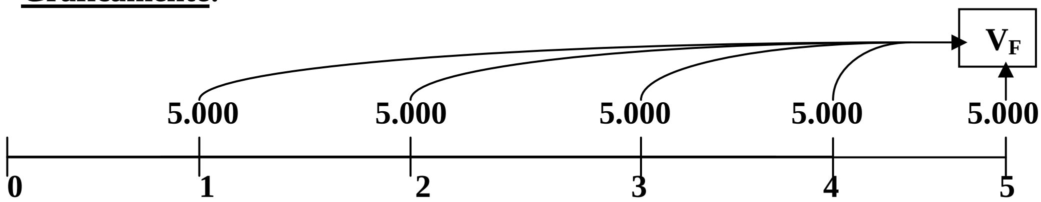
- Capitalizando cada capital de forma individual.
- Capitalizando todos los capitales a la vez utilizando para ello el factor de capitalización $\mathbf{S_{n\ i}}$.
- Calculando previamente su valor actual y capitalizando dicho valor hasta el momento **n.**

<u>**Ejemplos:**</u>

<u>**Ejemplo 1º:**</u> Calcular el valor final de una renta constante anual inmediata pospagable de 5.000 € durante 5 años, valorada al 7% de interés compuesto anual.

Solución:

<u>**Gráficamente**</u>**:**



Valor final de una renta constante inmediata pospagable

Como hemos visto anteriormente, hay 3 procedimientos de calcular el valor final de la renta. Vamos a resolver el ejercicio por los 3 para comprobar la igualdad del resultado.

a) <u>Desplazando cada capital por separado</u>:

$$V_A = \alpha_1(1+i)^{n-1} + \alpha_2(1+i)^{n-2} + \ldots + \alpha_n(1+i)^{n-n} =$$

$$5000(1'07)^4 + 5000(1'07)^3 + 5000(1'07)^2 + 5000(1'07)^1 + 5000(1'07)^0 = 28753'70\text{ €.}$$

b) <u>Desplazando todos los capitales a la vez utilizando el factor</u> **$S_{n\ i}$:**

$$V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} = \alpha \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_F = 5000\frac{(1'07)^5 - 1}{0'07} = 28753'70\text{ €.}$$

c) <u>Determinar previamente el valor actual, y capitalizándolo posteriormente hasta el momento</u> **n:**

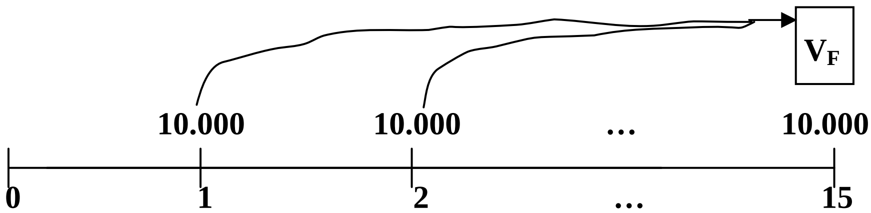
$$V_A = \alpha \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 5000 \cdot \frac{1-(1+0'07)^{-5}}{0'07} = 20500'99\text{ €.}$$

$$V_F = V_A(1+i)^5 = 20500'987(1+0'07)^5 = 28753{,}70\text{ €.}$$

<u>Ejemplo 2º</u>: Si depositamos en una entidad financiera 10.000 € al final de cada año. ¿Qué cantidad podremos retirar al cabo de 15 años siendo el tipo de interés el 6,5% compuesto anual?.

Solución:

<u>Gráficamente</u>:



Valor final de una renta inmediata pospagable

Partiendo de que: $V_F = \alpha \cdot S_{n\ i}$

Sustituyendo los datos, resulta:

$$V_F = \alpha \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 10000 \cdot \frac{(1+0'0650)^{15} - 1}{0'0650} = 241821'70\text{ €.}$$

Cantidad que podemos retirar transcurrido 15 años.

Realizaremos el ejercicio de otra forma: Determinando previamente el valor actual, y capitalizándolo posteriormente hasta el momento **n:**

$$V_A = \alpha\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 10000\frac{1-(1+0'0650)^{-15}}{0'0650} = 94026'69\text{ €.}$$

$$V_F = V_A(1+i)^n = 94026'69(1+0'0650)^{15} = 241821'697 \cong 241821{,}70\text{ €.}$$

H. Cálculo de α, *i* y *n* en función del Valor final:

Si en la expresión: $\mathbf{V_F = \alpha \cdot S_{n\ i}}$, conocemos tres de los cuatro componentes, $\mathbf{V_F}$, α, **n, i,** podemos hallar el cuarto en función de los otros tres.

Hemos visto ya cómo se calcula el valor final $\mathbf{V_F}$. Veamos a continuación cómo se procedería al cálculo de los demás.

a) Cálculo de α:

Partiendo de la expresión: $V_F = \alpha \cdot S_{n\ i}$

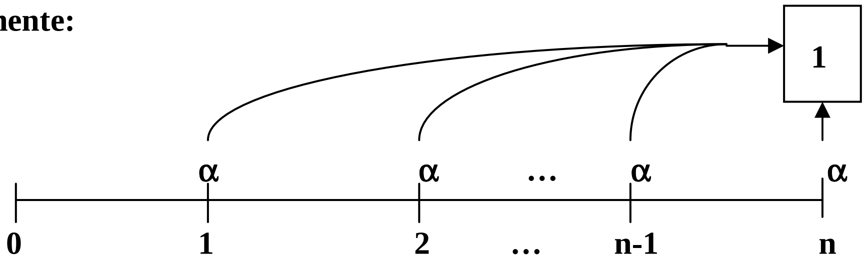
basta despejar α y resultará $\alpha = V_F \cdot \frac{1}{S_{n\ i}}$

Y diremos que α es la **anualidad que reconstruye un capital V_F o anualidad de reconstrucción de dicho capital.**

Si $V_F = 1$, resulta: $\alpha = \frac{1}{S_{n\ i}}$

Siendo en este caso α la **anualidad que reconstruye un capital de una unidad monetaria.**

Gráficamente:



b) Cálculo de i:

Partiendo de la expresión $V_F = \alpha \cdot S_{n\ i}$

obtenemos: $S_{n\ i} = \frac{V_F}{\alpha}$

Como el cociente $\mathbf{V_F/\alpha}$ es conocido y resulta ser el valor final de una renta unitaria de un número de términos **n** conocido, valorada a un tipo de interés que queremos calcular, buscando en la Tabla V en la fila correspondiente a **n** el valor $\mathbf{V_F/\alpha}$, el encabezamiento de la columna en la que se encuentre nos dará el tanto **i** buscado.

Si el valor $\mathbf{V_F/\alpha}$ no está explicitado en la Tabla, procederemos a la interpolación.

c) Cálculo de n:

Se puede hacer de dos maneras:

1º Forma:

Partiendo de la expresión $V_F = \alpha \cdot S_{n\ i}$

De donde :

$$S_{n\ i} = \frac{V_F}{\alpha}$$

expresión en la que conocemos $\mathbf{V_F}$, **i** y α**.**

Como el cociente V_F/α es conocido y resulta ser el valor final de una renta unitaria valorada a un tipo de interés **i** conocido y de un número de términos **n** que queremos calcular, buscando en la Tabla V en la columna correspondiente al tanto de interés dado, el valor V_F/α nos determinará el número de términos **n** buscado, bien de forma inmediata, bien por interpolación.

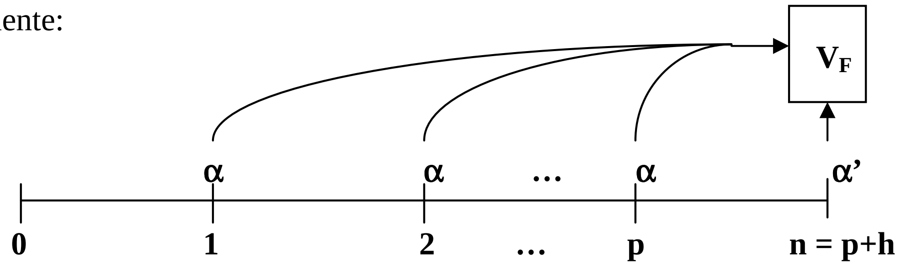
Si el número de términos no es entero

$$n = p + h \qquad (0<h<1)$$

nos indicará que la renta se compone de **p** términos de cuantía α más un pago adicional **α'** a realizar en el momento **p + h,** siendo la cuantía de **α'** el resultado de multiplicar α por **h.**

$$\boldsymbol{\alpha' = \alpha \,.\, h}$$

Gráficamente:



2º Forma:

$$V_F = \alpha \cdot S_{n\,i} = \alpha \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \frac{V_F}{\alpha} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \frac{V_F \cdot i}{\alpha} = (1+i)^n - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_F \cdot i}{\alpha} = (1+i)^n - 1 \Rightarrow \frac{V_F \cdot i}{\alpha} + 1 = (1+i)^n \Rightarrow \mathrm{Log}\left(\frac{V_F \cdot i}{\alpha} + 1\right) = n \cdot Log(1+i) \Rightarrow$$

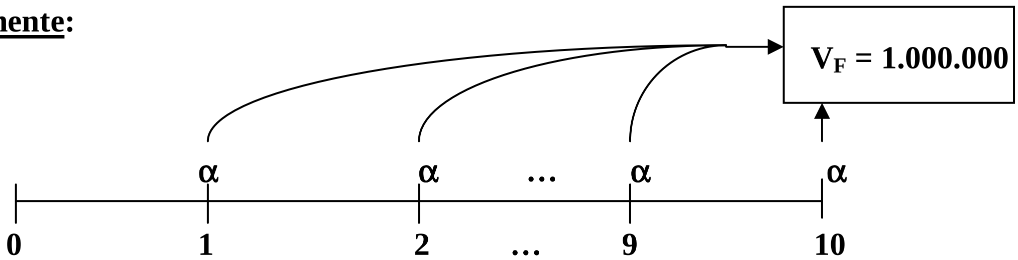
$$n = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{V_F \cdot i}{\alpha} + 1\right)}{Log(1+i)}$$

Ejemplos:

Ejemplo 1º: Calcular la cantidad que debemos depositar al final de cada año, en una entidad financiera al 6% de interés compuesto anual si deseamos reconstruir un capital de 1.000.000 € en 10 años.

Solución:

Gráficamente:



La suma del valor final de todas las anualidades deberá ser igual a 1.000.000 € y por tanto:

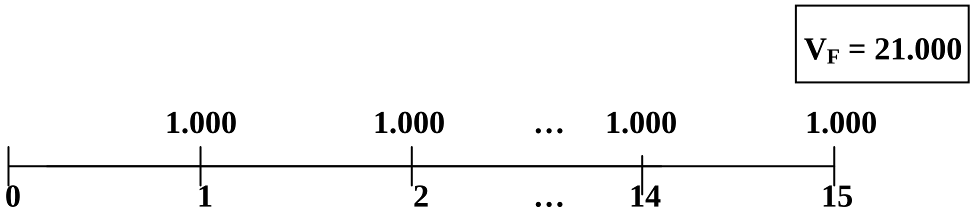
$$V_F = \alpha \cdot S_{n\,i} = \alpha \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow 1000000 = \alpha \cdot S_{n\,i}$$

$$\textbf{\textit{de donde :}} \quad \alpha = \frac{V_F}{S_{n\,i}} = \frac{1000000}{\frac{(1+0'06)^{10} - 1}{0.06}} = 75867'96 \text{ €.}$$

Ejemplo 2º: Calcular el tanto de interés compuesto al que capitaliza una institución financiera en la que, haciendo imposiciones de 1.000 € al final de cada año y durante 15 años se logra constituir un capital de 21.000 €.

Solución:

Gráficamente:



Valor final de una renta inmediata pospagable

Por tanto:

$$V_F = \alpha \cdot \cdot S_{n\ i} \Rightarrow S_{n\ i} = \frac{V_F}{\alpha} = \frac{21000}{1000} = 21$$

Buscando en la Tabla V encontramos en la fila correspondiente a 15 términos:

Al 4% ……….. 20’023588
Al 5% ……….. <u>21’578564</u>
-1’554976
21
Al 8% ……….. <u>20’023588</u>
x% = 0’976412

luego el tanto que buscamos estará comprendido entre el 8 y el 9% y diremos:

A una diferencia de 1% ………… -1’554976
A una diferencia de x% ………… 0’976412

De donde:

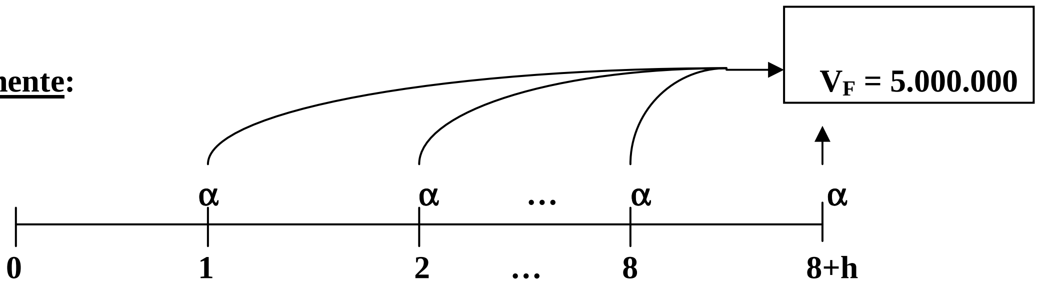
$$x = \frac{0'976412}{1'554976} = 0'627973\%$$

Luego el tanto buscado será **4’627973%**

Ejemplo 3º: Una empresa dispone de una máquina que deberá reemplazar dentro de varios años, y ha estimado que el valor de la nueva máquina en el momento del cambio será de 5.000.000 € . Si par hacer frente a dicho pago decide depositar desde este año y al final de cada año 475.000 € en una institución financiera que capitaliza al 6% compuesto anual, ¿cuántas imposiciones deberá hacer para conseguir el importe de la máquina en el momento de reponerla?

Solución:

Gráficamente:



Lo realizaremos por varias formas:

1º Forma:

Por tanto:

$$V_F = \alpha \cdot S_{\overline{n}|i} \Rightarrow S_{\overline{n}|i} = \frac{V_F}{\alpha} = \frac{5000000}{475000} = 10'526315$$

Buscando en la Tabla V encontramos en la columna del 6%:

Para 8 términos ……….. 9’897468
Para 9 términos ……….. 11’491316
-1’593848
Para 8 términos ……….. 9’897468
10’526315
h término = -0’628847

luego el tanto que buscamos estará comprendido entre el término 11 y 12 y diremos:

A una diferencia de 1 año ………… -1’593848
A una diferencia de h ………… -0’628847

De donde:

$$h = \frac{-0'628847}{-1'593848} = 0'3945464 \text{ años}$$

Es decir que el vencimiento de α’ es 8’3945464 años después del momento cero.

0’3945464 x 12 = 4’7345568, es decir, 4 meses.
0’7345568 x 30 = 22’036704, es decir, 22 días.

P + h = 8’3945464 años = 8 años, 4 meses y 22 días

La cantidad de α’ a entregar será:

α’ = α. h = 475.000 x 0,3945464 = 187.409,54 €

2º Forma:

$$n = \frac{Log\left(\frac{V_F \cdot i}{\alpha} + 1\right)}{Log(1+i)} = \frac{Log\left(\frac{5000000 \times 0'06}{475000} + 1\right)}{Log(1+0'06)} = \frac{Log\,1'6315789}{Log\,1'06} = 8'40153421 \text{ términos.}$$

Es decir que el vencimiento de α’ es 8’4015342 años después del momento cero.

0’4015342 x 12 = 4’8184104, es decir, 4 meses.
0’8184104 x 30 = 24’552312, es decir, 24 días.

P + h = 8’4015342 años = 8 años, 4 meses y 24 días

I. Relaciones entre y $S_{n\ i}$ y sus inversos

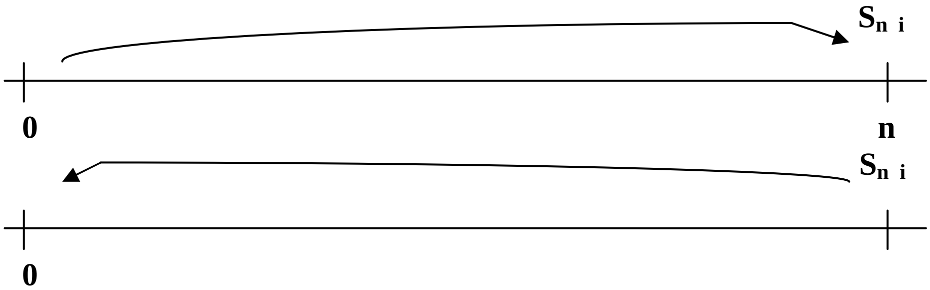
Como hemos visto, el factor de capitalización $S_{n\ i}$ es el resultado de capitalizar el factor de actualización

$$\boxed{S_{n\ i} = \quad (1+i)^n}$$

De la misma forma podemos decir que el factor de actualización es el resultado de actualizar el factor de capitalización $S_{n\ i}$.

$$\boxed{= S_{n\ i}\,(1+i)^{-n}}$$

Gráficamente:



Recordemos los valores de y $S_{n\ i}$

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad\qquad S_{n\ i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\textit{Utilizamos el paso anterior}: \qquad = \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

Sus inversos serán por tanto:

$$\frac{1}{\;} = \frac{1}{\dfrac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}} \qquad\qquad \frac{1}{S_{n\ i}} = \frac{1}{\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$\frac{1}{\;} = \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \qquad\qquad \frac{1}{S_{n\ i}} = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

El valor de su diferencia resulta:

$$\frac{1}{\;} - \frac{1}{S_{n\ i}} = \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{i}{(1+i)^n - 1} =$$

$$= \frac{i(1+i)^n - i}{(1+i)^n - 1} = \frac{i \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i)^n - 1}$$

Y simplificando resulta:

$$\boxed{\frac{1}{\;} - \frac{1}{S_{n\ i}} = i}$$

Vemos que la diferencia entre la anualidad de amortización y la anualidad de reconstrucción es igual al tanto unitario de interés.

De esta formula se puede obtener o la anualidad de amortización o la anualidad de reconstrucción, con solo conocer el otro.

ooooo

Ejercicios: cálculo del valor final.

Ejercicio 1º: ¿En cuánto se convierte una anualidad ordinaria de 5.000 € anuales, durante 6 años, al 3 %?
Resolución:

$$V_F = \alpha \cdot \frac{(1+1)^n - 1}{i} = 5000\frac{(1+0'03)^6 - 1}{0'03} = 5000 \times 6'468409884 = 32342'05\ €.$$

Ejercicio 2º: Al final de cada año se depositan en el banco 150.000 € Si el banco paga el 7 % anual, ¿cuánto dinero habría inmediatamente después del 5º año? ¿Y después del 8º?
Resolución:

$$V_F = \alpha . \frac{(1+i)^n - 1}{i};\ V_5 = 150000\frac{(1+0'07)^5 - 1}{0'07} = 862610'85\ €.$$

Al final del 5º año habría 862.611 €

$$V_F = \alpha \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i};\ V_8 = 150000\frac{(1+0'07)^8 - 1}{0'07} = 1538970'38\ €.$$

Al final del 8º año habría 1.538.970 €

J. Valor actual de una renta anual constante cuyo vencimiento tiene lugar en un momento cualquiera:

Recordemos que para actualizar los términos de una renta constante anual disponemos de un factor de actualización que nos desplaza todos los capitales a un momento anterior al primer vencimiento.

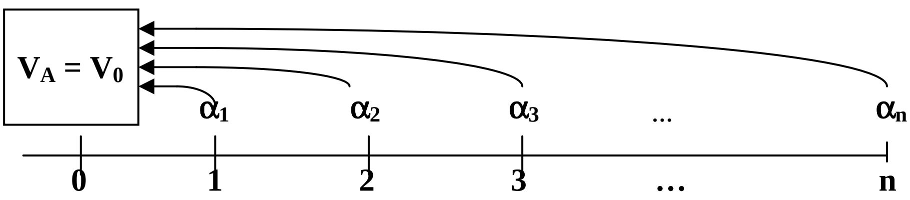
Recordemos también que la expresión de dicho factor de actualización es:

$$= (1+\mathrm{i})^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+\mathrm{i})^{-n}$$

Si el primer vencimiento de la renta tiene lugar al final del primer período de su constitución **(renta pospagable),** dicho factor lleva todos los capitales al momento cero y, por tanto, ya que tenemos calculado su valor, es decir:

$$V_A = V_0 = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i}$$

Gráficamente:



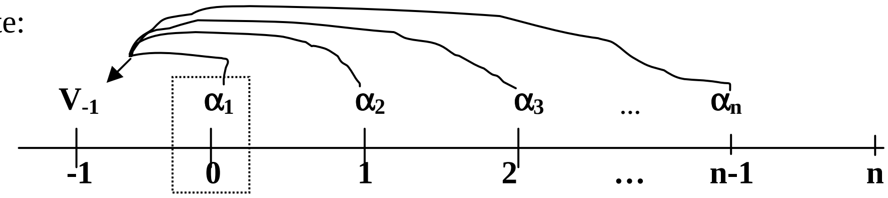
Si el primer vencimiento de la renta no tiene lugar al final del primer período de su constitución, podemos seguir aplicando la expresión anterior, pero debemos hacer cálculos posteriores para desplazar el valor así obtenido al momento cero.

Vamos a ver a continuación, de forma sencilla, cómo resolver los casos más frecuentes que se pueden presentar.

a) **Que el primer vencimiento de la renta sea en el momento cero:**

Cuando el primer vencimiento tenga lugar en el momento cero, al aplicar el factor de actualización $_{n \;\; i}$ nos llevará todos los capitales a un período anterior, es decir, al momento **–1.** A esta renta recibe el nombre de **renta anual inmediata prepagable.**

Gráficamente:



Como el valor actual V_A de la renta es el valor de todos los capitales en el momento cero, deberemos desplazar el valor **V_{-1}** obtenido en el momento **-1** hasta el momento cero, mediante el factor de capitalización **(1+i)**

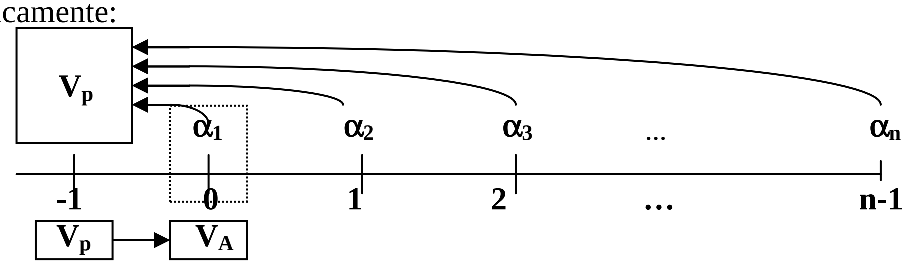
Por tanto el valor actual de la renta será:

$$V_A = V_{-1}\,(1+i) =$$

O, lo que es lo mismo:

$$V_A = \alpha \;.\; _{n \;\; i}\;(1+i) \qquad\qquad (1)$$

Gráficamente:

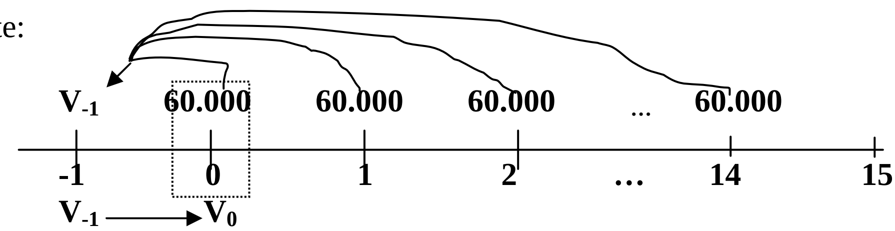


Obsérvese que, en este caso, el número de términos de la renta sí coincide con su duración. Pero se dice que la renta es inmediata prepagable, porque sus términos se devengan al principio del período. Por ejemplo, tomando un local en alquiler, y pagamos la renta por adelantado. Primero, en cada período, se paga la renta, y luego se utiliza dicho local.

Ejemplo 1º: Calcular el valor de una renta anual, constante, de 60.000 €, de 15 términos, que se valora al 7% compuesto anual, si el primer vencimiento tiene lugar en el momento cero.

Solución:

Gráficamente:



Procediendo aplicar la expresión (1), resultará:

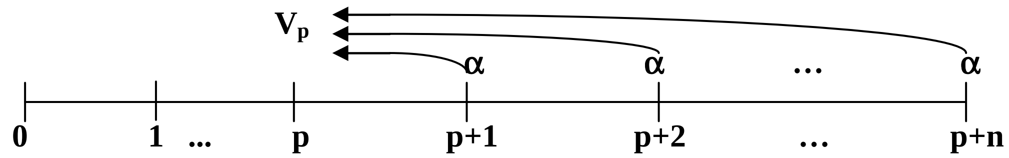
$$V_A = \alpha \;\; _{n \;\; i} \cdot (1+i) = 60000\,\frac{1-(1+0{,}07)^{-15}}{0{,}07}\,(1+0{,}07) = 584728{,}08\ €$$

b) **Que el primer vencimiento de la renta sea al cabo de (p + 1) años:**

Cuando el primer vencimiento tenga lugar a los **(p+1) años** de constitución de la renta, siendo **p** mayor que la unidad, al aplicar el factor de actualización $_{n\ i}$ nos llevará todos los capitales a un período anterior a (p+1), es decir, al momento **p.** Obtendremos así no valor en el momento cero $\mathbf{V_0}$, sino el valor $\mathbf{V_p}$ en el momento p. A esta renta recibe el nombre de **rentas diferidas** pospagable o prepagable según el pago sea al final o al principio del período.

$$\mathbf{V_p = \alpha \,.\ {}_{n\ i}}$$

Gráficamente:

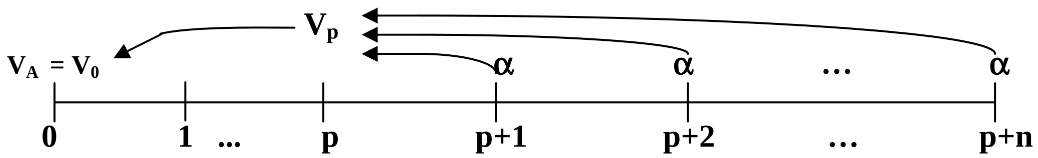


Como el valor actual de la renta es el valor de todos sus capitales en el momento cero, deberemos desplazar el valor obtenido $\mathbf{V_p}$ en el momento **p** hasta el momento cero, mediante el factor $(1+i)^{-p}$

Por tanto, el valor actual $\mathbf{V_A}$ de la renta será: $V_A = V_p \,.\, (1 + i)^{-p}$

Y sustituyendo $\mathbf{V_p}$ por su valor se obtiene: $\boxed{\mathbf{V_A = \alpha \,.\ \ (1 + i)^{-p}}}$ (1)

Gráficamente:

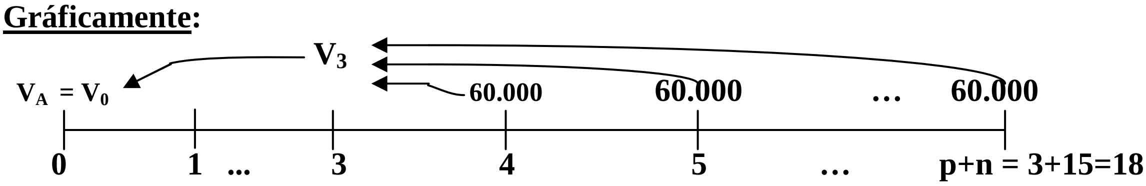


Obsérvese que, en este caso, el número de términos de la renta no coincide con su duración. Para hallar el número de términos, podemos restar al valor del último vencimiento el valor del anterior al primero. Así, en este caso, resulta:

Número de términos = (p+n) – p = n

Ejemplo 1º: Averiguar el valor actual de una renta anual, constante, de 60.000 €, de 15 términos, que se valora al 7% compuesto anual, si el primer término vence a los 4 años.
Solución:

Gráficamente:



Procediendo aplicar la expresión (1), resultará:

$$V_A = \alpha \quad {}_{n\ i} \cdot (1+i)^{-p} = 60000\,\frac{1-(1+0{,}07)^{-15}}{0{,}07}(1+0{,}07)^{-3} = 446086{,}25\ €$$

EJEMPLOS:

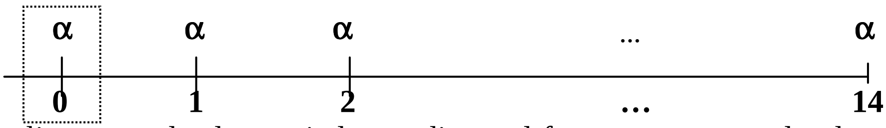
Ejemplo 1º: Una sociedad alquila un local por el que va a pagar 421 € al principio de cada año en concepto de alquiler.

- Cuando se va a realizar el primer pago, y antes de producirse, el propietario le propone a la sociedad la venta del citado local por el importe actualizado de la renta de 15 años.
- Calcular el valor del local hoy considerando un tipo de interés compuesto del 7% anual.

Solución:

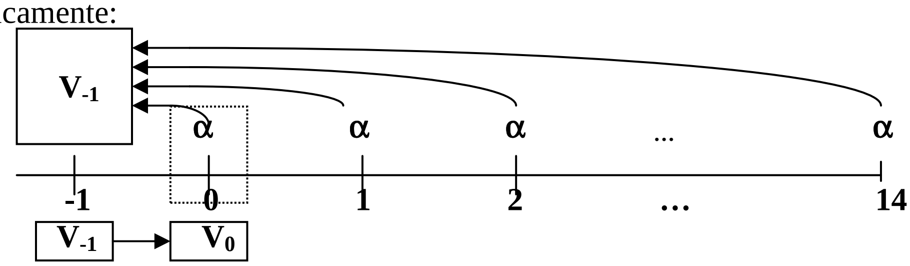
Se trata de una renta cuyo primer vencimiento tiene lugar hoy, momento cero.

Su representación gráfica es:



Si actualizamos todos los capitales mediante el factor nos desplazará todos los capitales al momento **–1**, debiendo posteriormente desplazar el valor obtenido $\mathbf{V_{-1}}$ hasta el momento cero multiplicando dicho valor, en este caso, por (1+i)..

Gráficamente:



Su valor actual será:

$$\mathbf{V_A = V_{-1}\ (1+i) =}$$

$$V_0 = V_A = \alpha \cdot \quad {}_{15\ 0'07}\ (1+i) = \alpha \cdot \frac{1-(1+i)^{-15}}{i}(1+i) = 471\frac{1-(1+0'07)^{-15}}{0'07}(1+0'07) = 4102{,}84\ €.$$

Dicho valor será el precio que se exige hoy por el local.

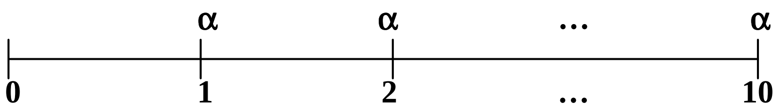
Ejemplo 2º: Calcular el valor actual de una renta constante de 10 términos de 5.000 € cada uno si se valora al 6% de interés compuesto anual, considerando que se trata de una renta:

a) Inmediata pospagable.
b) Inmediata prepagable.
c) Diferida 4 años y pospagable.
d) Diferida 4 años y prepagable.

Solución:

Solución caso a):

Como la renta es inmediata pospagable, su representación gráfica es:



Y su valor actual será :

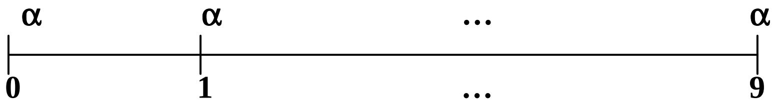
$$V_A = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i}$$

Sustituyendo datos resulta :

$$V_A = 5000 \cdot \quad {}_{10\ \ 0'06} = 5000 \times 7'360087 = \mathbf{36800'44\ €.}$$

Solución caso b):

Como la renta es inmediata prepagable, su representación gráfica es:



Y su valor será el resultado de desplazar todos los capitales al momento -1 con el factor $_{n\ i}$ y posteriormente trasladar el capital allí obtenido al momento cero:

$$V_A = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i}\,(1+i)$$

Y sustituyendo datos resulta :

$$V_A = 5000 \cdot \quad {}_{10\ 0'06} \cdot (1+0'06)$$

$$V_A = 5000 \times 7'360087 \times 1'06 = \mathbf{39008'46\ €}$$

Como hemos apuntado anteriormente, también se podía haber calculado el valor actual de dicha renta sumando al primer término, que tiene su vencimiento ya en el momento cero, el resto de los términos actualizados hasta ese momento, con lo que resultaría:

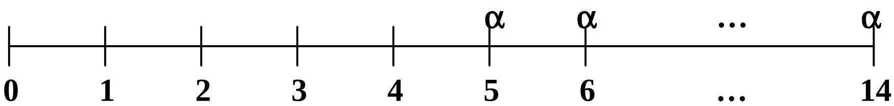
$$V_A = \alpha + \alpha \quad {}_{n\text{-}1\ i}$$

Sustituyendo datos resulta:

$$V_A = 5000 + 5000 \cdot \quad {}_{9\ 0'06} = 5000 + 5000 \times 6'801692 = \mathbf{39008'46\ €.}$$

Solución caso c):

Como la renta es diferida 4 años y pospagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento 5, y su representación gráfica es:



Y su valor actual será resultado de desplazar todos los capitales al momento 4 con el factor $_{n\ i}$ y posteriormente trasladar el capital allí obtenido al momento cero, por lo que habremos de actualizar dicho capital durante 4 años.

$$V_A = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i} \cdot (1+i)^{-4}$$

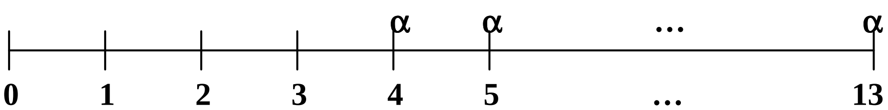
Sustituyendo daros resulta :

$$V_A = 5000 \quad {}_{10\ 0'06} \cdot (1+0'06)^{-4} =$$

$$V_A = 5000 \times 7'360087 \times 0'792094 = \mathbf{29149'40\ €}$$

Solución caso d):

Como la renta es diferida 4 años y prepagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento 4, y su representación es:



Y su valor actual será el resultado de desplazar todos los capitales al momento 3 con el factor $_{n\ i}$ y posteriormente trasladar el capital allí obtenido al momento cero, por lo que habremos de actualizar dicho capital durante 3 años.

$$V_A = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i} \cdot (1+i)^{-3}$$

y sustituyendo datos resulta :

$$V_A = 5000 \cdot \quad {}_{10\ 0'06} \cdot (1+0'06)^{-3} =$$

$$V_A = 5000 \times 7'360087 \times 0'839619 = \mathbf{30898'34\ €}$$

K. <u>Valor final de una renta cuyo primer vencimiento tiene lugar en un momento cualquiera</u>:

Como hemos visto anteriormente, el factor de capitalización de una renta anual constante $S_{n\ i}$ nos traslada todos los capitales al momento del **último vencimiento.**

Recordemos que la expresión de dicho factor de capitalización es:

$$S_{n\ i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i)^{n-(n-1)} + (1+i)^{n-n} + 1$$

Hay que tener en cuenta, también, que el valor final de una renta es el valor de todos los capitales que la componen valorados en el **momento último hasta el que dure la renta.**

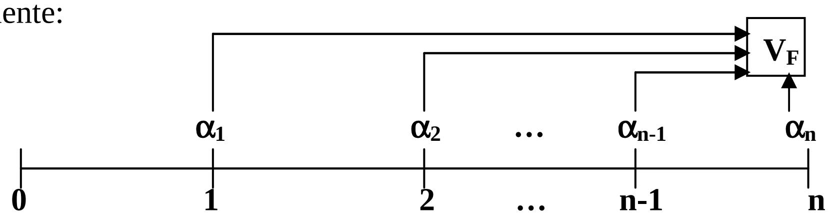
Puede ocurrir que el último coincida o no con el momento último hasta que dure la renta, pudiéndose así dar dos posibilidades que vamos a ver a continuación:

a) <u>Que el último vencimiento coincida con el momento último hasta el que dure la renta (renta pospagable)</u>:

Se trata, en este caso, de una **renta pospagable**, es decir, que los pagos se realizan al final de cada período. Por tanto, en el último período de la renta, el momento del último vencimiento coincide con el último pago.

Por ejemplo, se contrata con una empresa de servicios el mantenimiento de nuestras máquinas por un período de 5 años y un coste determinado que se pagará al final de cada año. El último año de contrato, como todos los demás, recibimos primero el servicio de mantenimiento, y al final pagamos su importe.

Gráficamente:



Su valor final, como hemos visto anteriormente, será

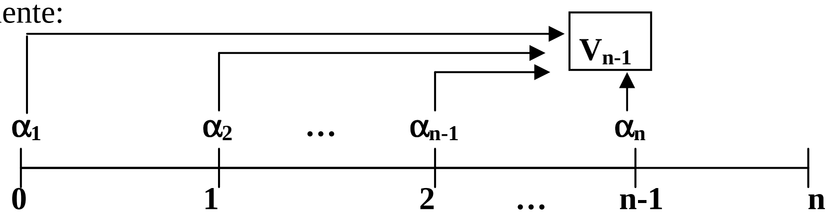
$$\boxed{V_F = V_n = \alpha \cdot S_{n\ i}}$$

b) <u>Que el último vencimiento se produzca en el momento anterior al último hasta que dure la renta (renta prepagable)</u>:

Se trata, en este caso, de una **renta prepagable**, es decir, que los pagos se realizan al comienzo de cada período. Por tanto, en el último período de la renta, el momento del último vencimiento no coincide con el último pago, sino uno anterior..

Por ejemplo, tomamos un local en alquiler, y pagamos la renta por adelantado. Primero se paga la renta, y luego, durante el período acordado, se utiliza dicho local. El último período de utilización del local, al igual que los anteriores, pagamos el alquiler al principio del período, y luego lo utilizamos durante todo ese período.

Gráficamente:



En este caso, al aplicar el factor de capitalización $S_{\overline{n}|\,i}$ nos desplaza todos los capitales al momento del último vencimiento, es decir, al momento **n-1.**

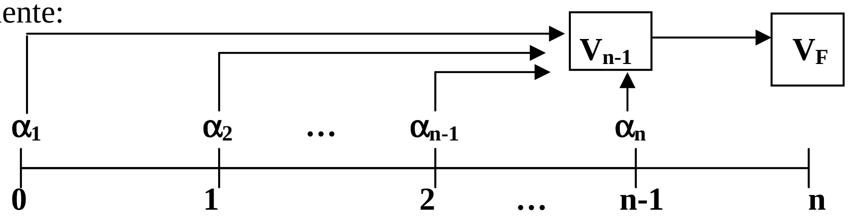
Así resulta:

$$V_{n-1} = \alpha \cdot S_{\overline{n}|\,i}$$

Pero ese no es su valor final, porque la renta dura hasta el momento **n**.

Por tanto, deberemos multiplicar el valor allí obtenido por el factor de capitalización **(1+i)** para desplazar hasta el momento **n** dicho valor.

Gráficamente:



Su valor final, por tanto, será:

$$\boxed{V_F = V_n = \alpha \cdot S_{\overline{n}|\,i}\,(1+i)}$$

EJEMPLOS:

Ejemplo 1º: Averiguar el capital constituido que se obtiene haciendo 15 imposiciones anuales, constantes, de 390,66 € cada una, en una institución financiera que capitaliza al 7% anual compuesto, si la renta es:

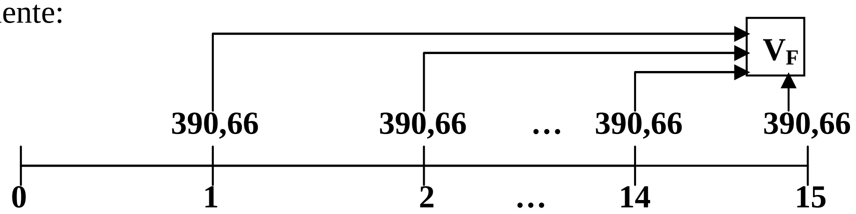
a) Inmediata pospagable.

b) Inmediata prepagable.

Solución a)

Primer vencimiento en el momento uno. El capital constituido será el valor final de la renta.

Gráficamente:

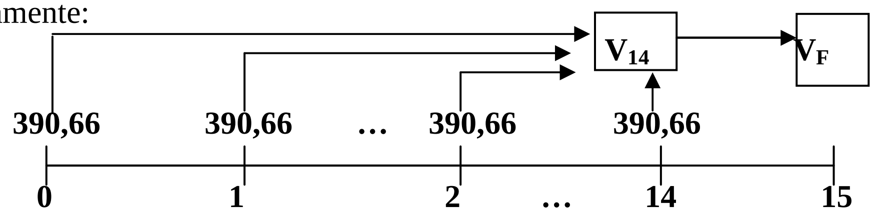


$$V_F = V_{15} = \alpha \cdot S_{\overline{n}|\,i} = 390{,}66\,\frac{(1+0{,}07)^{15}-1}{0{,}07} = 9816{,}90\ €$$

Solución b)

Primer vencimiento en el momento cero. El capital constituido será el valor final de la renta.

Gráficamente:



$$V_F = V_{15} = \alpha \cdot S_{\overline{n}|\,i}\,(1+i) = 390{,}66\,\frac{(1+0{,}07)^{15}-1}{0{,}07}\,(1+0{,}07) = 10504{,}09\ €$$

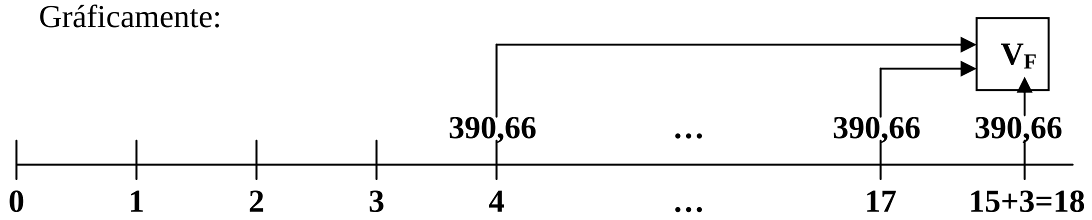
Ejemplo 2º: Averiguar el capital constituido que se obtiene haciendo 15 imposiciones anuales, constantes, de 390,66 € cada una, en una institución financiera que capitaliza al 7% anual compuesto, si la renta es:

c) Diferida 3 años y pospagable.
d) Diferida 3 años y prepagable.

Solución caso a)

Primer vencimiento en el momento cuatro. El capital constituido será el valor final de la renta.

Gráficamente:

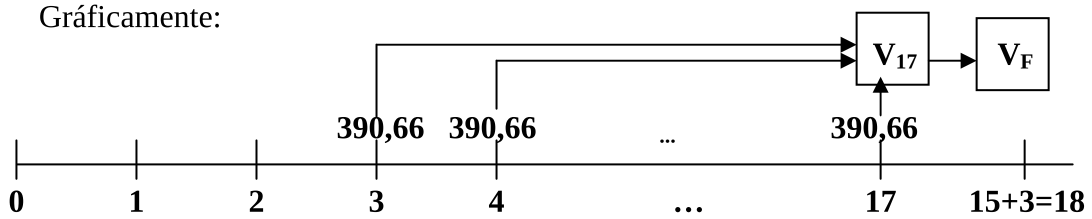


$$V_F = V_{18} = \alpha \cdot S_{\overline{n}|i} = 390{,}66\,\frac{(1+0{,}07)^{15}-1}{0{,}07} = 9816{,}90\ €$$

Solución caso b)

Primer vencimiento en el momento tres. El capital constituido será el valor final de la renta.

Gráficamente:



$$V_F = V_{18} = \alpha \cdot S_{\overline{n}|i}(1+i) = 390{,}66\,\frac{(1+0{,}07)^{15}-1}{0{,}07}(1+0{,}07) = 10504{,}09\ €$$

L. Aplicaciones:

De las muchas Operaciones que en la vida real puede tener lo expuesto sobre rentas, vamos a destacar las siguientes:

a) Operaciones de préstamos que se amortizan mediante renta.
b) Operaciones de constitución de un capital.
c) Cálculo del TAE (Tasa Anual Equivalente)

Ya hemos visto anteriormente algunos conceptos básicos sobre los apartados que hemos indicado aquí como casos de aplicación. Nos limitaremos ahora a resolver algún ejemplo de cada uno.

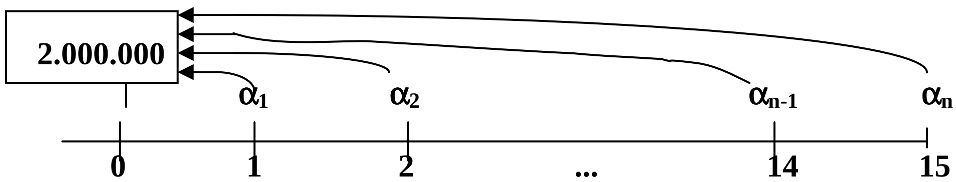
a) Operaciones de préstamos que se amortizan mediante una renta:

Ejercicio: Una entidad financiera concede un préstamo de 2.000.000 € para amortizar mediante 15 pagos anuales constantes. Si el tanto de interés del préstamo es del 10% anual compuesto, averiguar el importe de la anualidad que amortiza el préstamo, si la primera anualidad se paga:

a. Al año de concertado el préstamo.
b. A los tres años de concertado el préstamo.

Solución caso a)

Gráficamente:



El importe del préstamo ha de ser igual al valor actual de los 15 pagos que lo amortizan, valorados al tipo de interés pactado.

Partiendo de la expresión: $V_A = \alpha \,.\; {}_{n\;\;i}$

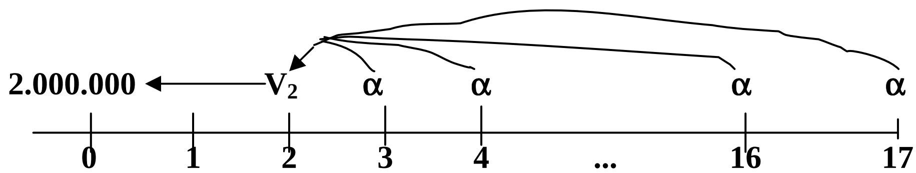
y sustituyendo datos $2.000.000 = \alpha \,.\; {}_{15\;\;0,10}$

De donde :

$$\alpha = \frac{V_A}{{}_{15\;\;0,10}} = \frac{2000000}{\dfrac{1-(1+0,10)^{-15}}{0,10}} = 262947,55\ €$$

Solución caso b)

Gráficamente:



Como en el caso anterior, el importe del préstamo ha de ser igual al valor actual de los 15 pagos que lo amortizan, valorados al tipo de interés pactado.

Por tanto, teniendo en cuenta que el primer término vence en el momento 3, la expresión del valor actual de la renta será: $V_A = \alpha \,.\; {}_{n\;\;i}(1+i)^{-2}$

Y sustituyendo datos, resulta: $2.000.000 = \alpha \;.\; {}_{15\;\;0,10}\,(1+0,10)^{-2}$

De donde :

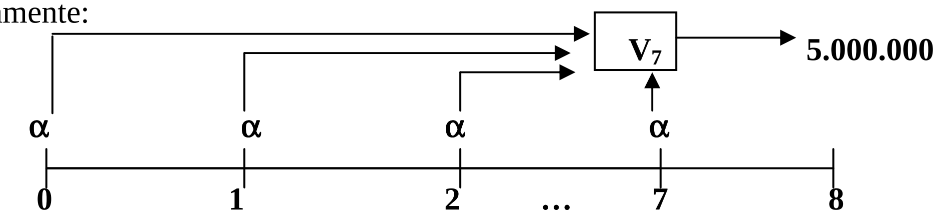
$$\alpha = \frac{V_A}{{}_{15\;\;0,10}}(1+0,10)^{-2} = \frac{2000000}{\dfrac{1+(1+0,10)^{-15}}{0,10}}(1+0,10)^{2} = 318166,54\ €$$

b) Operaciones de constitución de un capital:

Ejercicio: Dentro de 8 años tengo que cambiar de coche, y estimo que costará 5.000.000 €. Averiguar la cantidad que debo depositar al comienzo de cada año en un Fondo que capitaliza al 9% anual, si deso pagar el coche con el capital constituido.

Resolución:

Gráficamente:



El valor final de la renta ha de ser igual al capital constituido. Teniendo en cuenta que la renta es prepagable, la expresión que nos resuelve el problema es:

$$V_F = V_8 = \alpha \cdot S_{\;8\;\;0,09i}(1+0,09)$$

De donde : $$\alpha = \frac{V_8}{S_{\;8\;\;0,09}(1+0,09)} = \frac{5000000}{\dfrac{(1+0,09)^{8}-1}{0.09}(1+0,09)} = 415937,51\ €$$

c) Cálculo de la TAE (Tasa Anual Equivalente o Tanto Anual efectivo):

Ejercicio: La entidad de crédito Bankinter concede un préstamo de 10.000.000 € que se va amortizar mediante una renta anual constante de 9 términos, diferida 2 años y pospagable, al 11% de interés compuesto anual.

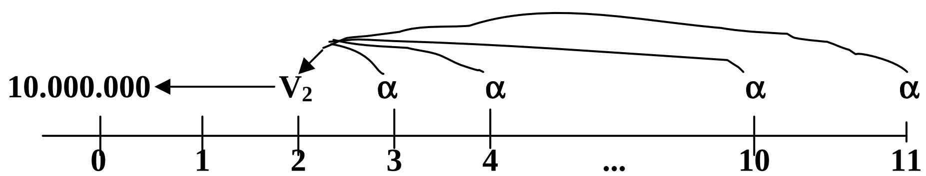
El préstamo es hipotecario, y supone unos gastos iniciales de 480.000 €, y otros de 360.000 € al finalizar el préstamo, ambos a cargo del prestatario. Averiguar:

a. La anualidad que exige el banco para amortizar el préstamo.

b. El tanto anual efectivo de coste al que le resulta la operación al prestatario.

Solución caso a)

Gráficamente:



Calcularemos primero la anualidad que amortiza el préstamo. Para ello sabemos que el valor actual de los pagos que lo amortizan, valorados al tipo de interés pactado, debe ser igual al importe del préstamo.

Por tanto, teniendo en cuenta que el primer término vence en el momento 2, la expresión del valor actual de la renta será: $V_A = \alpha \;.\; {}_{n\;\;i}(1+i)^{-2}$

Y sustituyendo datos, resulta: 10.000.000 = $\alpha \,.\ {}_{9\ \ 0,11}\ (1+0,11)^{-2}$

De donde :

$$\alpha = \frac{V_A}{{}_{9\ \ 0,11}}\left(1+0,11\right)^{-2} = \frac{10000000}{\dfrac{1+\left(1+0,11\right)^{-9}}{0,11}}\left(1+0,11\right)^{2} = 2225193,11\ €$$

El prestatario tiene que pagar al banco 2.225.193,11 € desde el momento 3 al momento 11 ambos inclusive, para amortizar el préstamo.

<u>Solución al caso b)</u>

Para calcular la TAE o tanto anual efectivo, debemos tener en cuenta, también que el prestatario debe pagar los gastos iniciales y finales que supone constituir y cancelar la hipoteca, gastos de escritura, notario, etc.

Veamos gráficamente lo que el prestatario recibe y lo que entrega:

Recibe:

10.000.000

0

Entrega:

2.225.193,11

480.000   2.225.193,11   2.225.193,11   ...   +360.000

0   1   2   3   4   ...   11

Como, por definición, la TAE es el tanto de interés efectivo anual que iguala el valor actualizado de lo que el prestatario recibe, con el valor actualizado de lo que entrega, la ecuación que nos va a permitir calcularlo es:

$$1.000.000 = 480.000 + 2.225.193,11\ {}_{9\ \ x}\ (1+ x)^{-2} + 360.000\ (1+ x)^{-11}$$

El problema que se plantea es que no podemos despejar el tanto, y debemos resolver la ecuación por el método iterativo, que consiste en dar valores a x hasta encontrar uno que, por aproximación, iguale ambos miembros de la igualdad.

De esta manera de resolver el problema nos da que el valor de **x = 12,06583 %.**

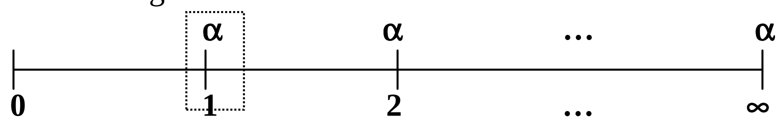
Vemos que, aunque el préstamo se contrata al 11%, el tanto efectivo de coste ha sido del **12,06% efectivo anual.**

M. <u>Valor actuar de una renta constante anual de infinitos términos</u>:

Vamos a ver a continuación como se calcula el valor actual de una renta constante anual de infinitos términos, considerando los cuatro tipos de rentas vistos en los puntos anteriores.

***a)* Renta inmediata pospagable.**

Su representación gráfica es:



Para determinar su valor actual, partiremos de la expresión general

$$V_A = \alpha \cdot \;_{n\ i}$$

en la que vamos a determinar el valor de $_{\mathbf{n}\ \mathbf{i}}$ cuando el número de términos sea infinito:

$$\cdot_{n\ i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^{n}}}{i}$$

Calculemos el límite de $_{\mathbf{n}\ \mathbf{i}}$ cuando **n** tiene a infinito, si la expresión anterior calculamos su límite:

$$\lim_{n\to\infty} \;_{n\ i} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^{n}}}{i} = \frac{1-\frac{1}{(1+i)^{\infty}}}{i} = \frac{1-0}{i} = \frac{1}{i}$$

Es decir:

$$\cdot_{\infty\ i} = \frac{1}{i}$$

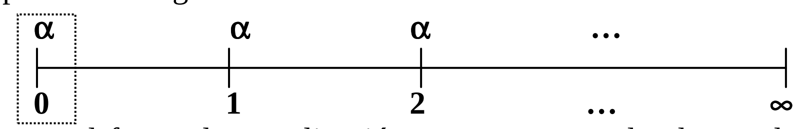
que es el valor actual de una renta unitaria constante anual de infinitos términos.

Si la cuantía de cada término de la renta es **α,** su valor actual será:

$$\boxed{V_A = \alpha \cdot \frac{1}{i}}$$

***b)* Renta inmediata prepagable.**

Su representación gráfica es:



Dado que el factor de actualización $_{\mathbf{n}\ \mathbf{i}}$ nos desplaza todos los capitales a un momento anterior al primer vencimiento, resultaría:

$$V_{-1} = \alpha \cdot \frac{1}{i}$$

por lo que capitalizando dicho valor se obtiene:

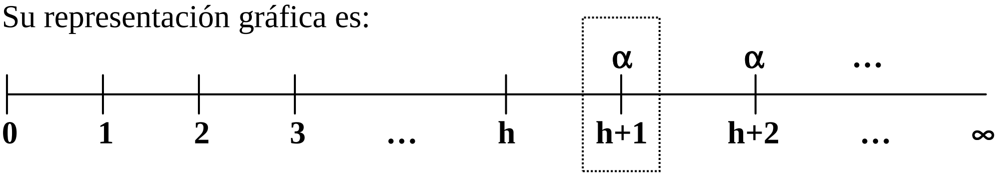
$$V_A = \alpha \cdot \frac{1}{i}(1+i)$$

o también, realizando la operación del paréntesis:

$$V_A = \alpha + \alpha \cdot \frac{1}{i}$$

que como puede apreciarse es el resultado de sumar a la anualidad correspondiente al momento cero el valor actualizado de los restantes términos.

***c)* Renta diferida h años y pospagable.**
Su representación gráfica es:



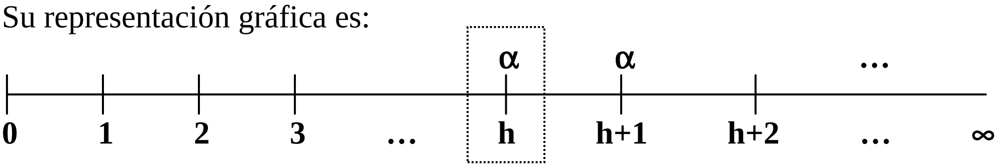
Partiendo de la expresión del valor actual de este tipo de rentas visto:

$$V_A = \alpha \cdot {}_{n\ i} \cdot (1+i)^{-h}$$

Y sustituyendo $_{n\ i}$ por su valor cuando la renta es de infinitos términos, resulta:

$$V_A = \alpha \cdot \frac{1}{i}(1+i)^{-h}$$

***d)* Renta diferida h años y prepagable.**
Su representación gráfica es:



Partiendo de la expresión del valor actual de este tipo de rentas visto en el 14

$$V_A = \alpha \cdot {}_{n\ i} \cdot (1+i)^{-(h-1)}$$

Y sustituyendo $_{n\ i}$ por su valor cuanto la renta es de infinitos términos, resulta:

$$V_A = \alpha \cdot \frac{1}{i}(1+i)^{-(h-1)}$$

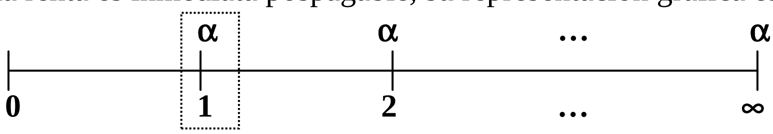
Ejemplo:

Calcular el valor actual de una renta constante anual de infinitos términos de 10.000 € cada uno, valorada al 8% de interés compuesto anual, si se trata de una renta:

a) Inmediata pospagable.
b) Inmediata prepagable.
c) Diferida 6 años y pospagable.
d) Diferida 6 años y prepagable.

Solución caso a):

Como la renta es inmediata pospagable, su representación gráfica es:

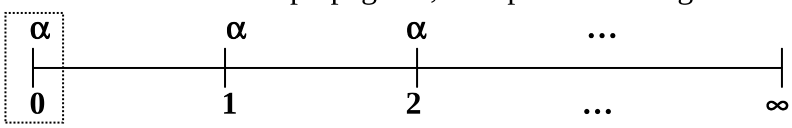


Y su valor actual será:

$$V_A = \alpha \cdot \frac{1}{i} = \frac{10000}{0'08} = 125000\text{ €.}$$

Solución caso b):

Como la renta es inmediata prepagable, su representación gráfica es:

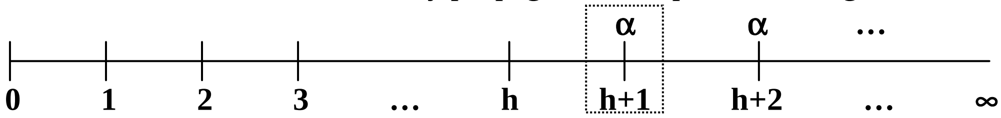


Y su valor actual será

$$V_A = \alpha \cdot \frac{1}{i}(1+i) = \frac{10000}{0'08}(1+0'08) = 135000\text{ €}$$

<u>Solución caso c)</u>:

Como la renta es diferida 6 años y pospagable, su representación gráfica es:

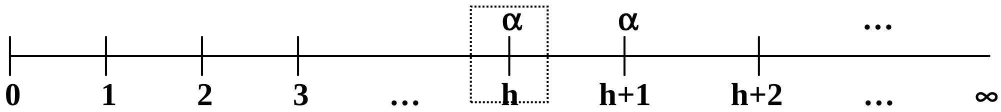


Y su valor actual será:

$$V_A = \alpha \cdot \frac{1}{i}(1+i)^{-h} = \frac{10000}{0'08}(1+0'08)^{-6} = \mathbf{78771'20\ €.}$$

<u>Solución caso d)</u>:

Como la renta es diferida 6 años y prepagable, su representación gráfica es:



Y su valor actual será:

$$V_A = \alpha \cdot \frac{1}{i}(1+i)^{-(h-1)} = \frac{10000}{0'08}(1+0'08)^{-(6-1)} = 125000(1+0'08)^{-5} = \mathbf{85072'90\ €.}$$

N. <u>Cálculo de α e *i* en una renta constante anual de infinitos términos</u>:

Limitándonos al caso de las rentas inmediatas pospagable, y partiendo de la expresión de su valor actual ya conocida:

$$V_A = \alpha \cdot \frac{1}{i}$$

la determinación de **α** o **i** conociendo **i** o **α** y **V_A** es inmediata.

$$\textit{Así :} \qquad \alpha = V_A \cdot i \qquad e \qquad i = \frac{\alpha}{V_A}$$

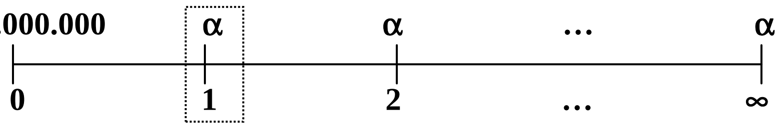
<u>EJEMPLOS</u>:

<u>Ejemplo 1º</u>: Si el valor de una renta constante anual perpetua pospagable es de 2.000.000 € calcular la cuantía de cada anualidad considerando un 8% de interés compuesto anual.

Solución:

Gráficamente:

V_A= 2.000.000



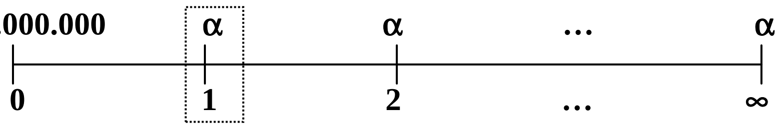
$$\alpha = V_A \cdot i = 2000000 \times 0'08 = \mathbf{160000\ €.}$$

<u>Ejemplo 2º</u>: De una finca que cuesta hoy 3.000.000 € se espera obtener una renta de 150.000 € al final de cada año. Determinar el tipo de interés utilizado para la valoración.

Solución:

Gráficamente:

V_A= 3.000.000



$$i = \frac{\alpha}{V_A} = \frac{150000}{3000000} = \mathbf{0'05} \;\Rightarrow\; \mathbf{5\%\ anual}$$

3. RENTAS CONSTANTES FRACCIONADAS:

A. Introducción:

Hemos estudiado anteriormente las rentas anuales constantes. Aquí veremos las **rentas constantes fraccionadas,** es decir, las que tienen una periodicidad inferior al año.

Este tipo de rentas aparecen en la vida real casi con más frecuencia que las de periodicidad anual.

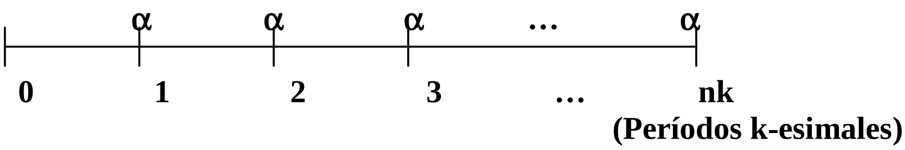
Ejemplos:

- Un trabajador percibe a cambio de su trabajo un sueldo mensual.
- Una casa se alquila y por ello se paga una renta mensual.
- Una obligación (título representativo de un empréstito) produce un interés semestral.
- Una empresa contrata por leasing la compra de una máquina y debe pagar todos los meses una determinada cantidad.

Una renta constante fraccionada es un conjunto de capitales de la misma cuantía cuyos vencimientos tienen lugar en cada k-ésimo de tiempo, siendo:

k = 1, 2, 3,… el número de partes en que se divide el año.

Si la renta es inmediata pospagable, su representación gráfica será:



El número de pagos o términos será **nk** es decir el resultado de multiplicar el número de años que dura la renta por el número de partes en que cada año se divide.

B. Calculo del valor actual de una renta constante fraccionada, en función del tanto k-esimal i_k:

Como hemos visto anteriormente, el factor $_{n \; i}$ nos traslada todos los capitales que componen la renta unitaria a un período anterior al primer vencimiento.

En este factor de actualización, **n** representa el número de términos anuales, e **i** el tanto anual al que se valora la renta. Recodemos que su desarrollo es:

$$_{n \; i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-n}$$

Para calcular el valor actual de una renta de periodicidad distinta de la anual, necesitamos saber el tanto correspondiente a dicha periodicidad.

Por ejemplo, si la renta tiene **x** términos mensuales, necesitamos el tanto mensual $\mathbf{i_{12}}$ correlativo. Así, en este ejemplo, $_{x \; i_{12}}$ nos trasladará todos los capitales de la renta unitaria mensual a un período (un mes) anterior al primer vencimiento. Su desarrollo será:

$$_{x \; i_{12}} = (1+i_{12})^{-1} + (1+i_{12})^{-2} + ... + (1+i_{12})^{-x}$$

Por ejemplo, si la renta tiene **z** términos semestrales, necesitamos el tanto mensual $\mathbf{i_2}$ correlativo. Así, en este ejemplo, $_{z \; i_2}$ nos trasladará todos los capitales de la renta unitaria semestral a un período (un semestre) anterior al primer vencimiento. Su desarrollo será:

$$_{z \; i_2} = (1+i_2)^{-1} + (1+i_2)^{-2} + ... + (1+i_2)^{-z}$$

En general, si la renta es fraccionada, es decir, si su periodicidad es menor que el año, siendo **k** el número de partes en que se divide el año, y **n** el número de años que dura la renta, resultará que el número de términos será **n . k** y necesitamos el tanto $\mathbf{i_k}$ para valorarla.

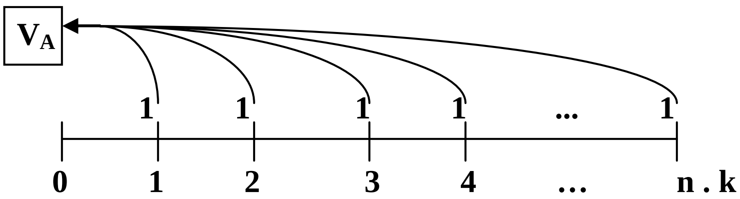
El factor de actualización correspondiente será $_{nk\ i_k}$ que nos trasladará todos los capitales que componen la renta unitaria de **n . k** términos a un período **k-esimal** anterior al primer vencimiento. Su desarrollo será:

$$_{nk\ i_k} = (1+i_k)^{-1} + (1+i_k)^{-2} + \ldots + (1+i_k)^{-nk}$$

Recodemos que el factor de actualización es igual a:

$$_{nk\ i_k} = \frac{1 - (1+i_k)^{-nk}}{i_k}$$

Si la renta es unitaria, inmediata, pospagable, de **nk** términos, es decir: α **= 1,** su representación gráfica será:

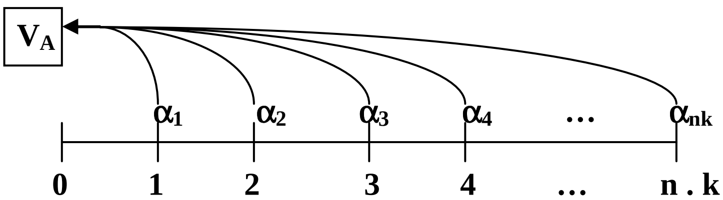


y su valor actual será:

$$\boxed{V_A = {}_{nk\ i_k}}$$

que es el **valor actual V_A de una renta unitaria fraccionada constante inmediata pospagable de *nk* términos, valorada al tipo de interés compuesto k-esimal i_k.**

Si la renta fuera inmediata, pospagable, de cuantía α y de **nk** términos, su representación gráfica será:



Valor actual de una renta inmediata pospagable

Y su valor actual será:

$$\boxed{V_A = \alpha \cdot {}_{nk\ i_k} = \alpha \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-nk}}{i_k}}$$

que es el **valor actual V_A de una renta fraccionada constante inmediata pospagable de *nk* términos de cuantía α cada uno y valorada al tanto de interés compuesto k-esimal i_k.**

Al igual que ocurre en la renta anual, cuando la renta no sea inmediata y pospagable, será preciso seguir un razonamiento semejante al expuesto anteriormente para las rentas anuales, pero teniendo siempre en cuenta que el factor de actualización nos traslada todos los capitales a un período anterior al primer vencimiento, Así:

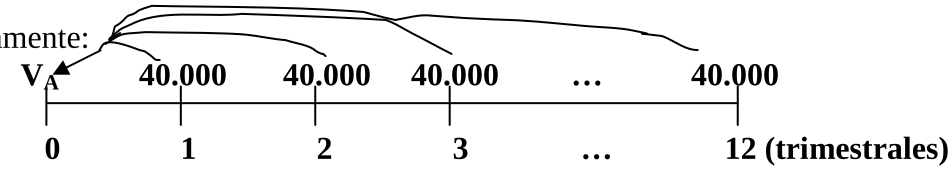
- Si la renta es anual, el factor de actualización nos traslada todos sus capitales al año anterior al primer vencimiento.
- Si la renta es mensual, el factor de actualización nos traslada todos sus capitales al mes anterior al primer vencimiento.
- Si la renta es trimestral, el factor de actualización nos traslada todos sus capitales al trimestre anterior al primer vencimiento.

Ejemplo 1º:

Calcular el valor actual de una renta inmediata pospagable de 40.000 € trimestrales que vamos a recibir durante 3 años valorada al 3% de interés compuesto trimestral.

Solución:

Gráficamente:



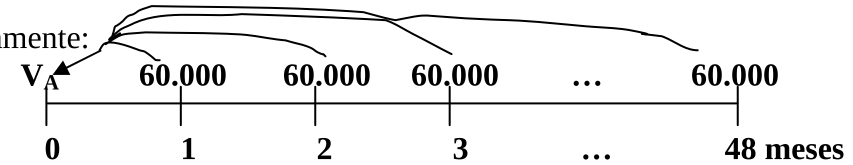
$$V_A = \alpha \cdot {}_{nk \;\; i_k} = \alpha \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-nk}}{i_k} = 40000\frac{1-(1+0'03)^{-3x4}}{0'03} = 398160'16 \text{ €.}$$

Ejemplo 2º:

Hallar la cuantía del préstamo que me ha concedido una institución financiera al 1,5% efectivo mensual, si se amortiza mediante una renta mensual, constante, inmediata, pospagable, de 48 términos, de 60.000 € cada uno.

Solución:

Gráficamente:



$$V_A = \alpha \cdot {}_{nk \;\; i_k} = \alpha \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-nk}}{i_k} = 60000\frac{1-(1+0,015)^{-48}}{0,015} = 2042553,22 \text{ €.}$$

C. Valor actual de la renta fraccionada, en función de un tanto distinto al correlativo i_k:

Como sabemos, el tanto y el tiempo deben guardar la necesaria correlación.

Así, si la renta es anual, el tanto usado para valorarla ha de ser anual. Si la renta es trimestral, el tanto debe ser trimestral, etc.

Anteriormente hemos calculado el valor actual de una renta de periodicidad k-esimal, en función del tanto k-esimal correlativo, i_k.

El problema surge cuando, en un determinado problema, la periodicidad de la renta no es correlativa con el tanto.

Puede plantearse varios casos distintos, de los que vamos a destacar a continuación los más habituales.

a) **<u>Caso de renta fraccionada, valorada a tanto efectivo anual *i* </u>:**

Cuando la renta fraccionada y el tanto de valoración es anual, el problema puede resolverse de varias formas, siendo la más sencilla la siguiente:

Hallar el tanto k-esimal i_k equivalente al tanto anual i conocido, y aplicar dicho tanto k-esimal a la expresión ya conocida del valor actual de la renta fraccionada.

Como ya hemos visto en capitalización compuesta, dos tantos, i e i_k son equivalentes cuando, aplicados al mismo capital inicial **(C_0)** durante el mismo tiempo, n años o nk k-ésimos, produce el mismo capital final o montante **(C_n).**

Veíamos allí cómo debía cumplirse que:

$$(1+i)^n = (1+i_k)^{nk}$$

Y despejando resulta:

$$\boxed{i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1}$$

valor que aplicaremos ya sin problemas a la expresión del valor actual de la renta fraccionada:

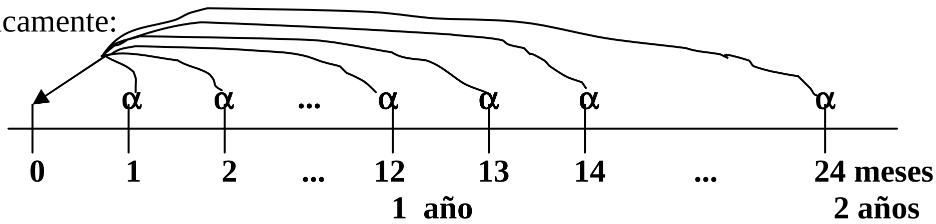
$$V_A = \quad {}_{nk\ \ i_k}$$

<u>Ejemplo 1º</u>:

Una institución educativa me ofrece en concepto de beca 300 € al final de cada mes durante dos años. ¿Qué capital equivalente a todas las mensualidades debería percibir hoy, si la valoración se hace al 6% de interés compuesto anual?.

Solución:

Gráficamente:



Hallaremos primero el tanto mensual equivalente al 6% anual. Así:

$$i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \Rightarrow i_{12} = (1+0{,}06)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}00486755057$$

Aplicando ahora los datos a la expresión general:

$$V_A = \alpha \cdot \quad {}_{nk\ \ i_k} = \alpha \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-nk}}{i_k} = 300\,\frac{1-(1+0{,}00486755057)^{-2\times 12}}{0{,}00486755057} = 6779{,}81\ €$$

b) **<u>Caso de renta fraccionada, valorada a tanto nominal J_k </u>:**

Cuando la renta es fraccionad y el tanto de valoración es el nominal J_k capitalizable en la misma frecuencia de la renta, basta hallar el tanto k-esimal i_k correspondiente.

Teniendo en cuenta que, por definición: $J_k = k \cdot i_k$;es decir: $\boxed{i_k = \frac{j_k}{k}}$

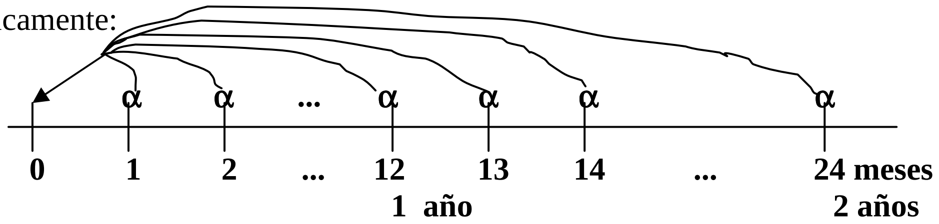
ya podemos calcular el valor actual de la renta aplicando el factor de actualización ${}_{nk\ \ i_k}$, como hemos hecho anteriormente.

Ejemplo 1º:

Una institución educativa me ofrece en concepto de beca 350 € al final de cada mes durante dos años. ¿Qué capital equivalente a todas las mensualidades debería percibir hoy, si la valoración se hace al 6% nominal, capitalizable mensualmente?.

Solución:

Gráficamente:



Hallaremos primero el tanto efectivo mensual i_{12}. Así:

$$i_k = \frac{j_k}{k} \Rightarrow i_{12} = \frac{j_{12}}{12} = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$$

Aplicando ahora los datos a la expresión general:

$$V_A = \alpha \cdot \;_{nk\;\, i_k} = \alpha \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-nk}}{i_k} = 350\,\frac{1-(1+0{,}005)^{-2\times 12}}{0{,}005} = 7897{,}01\text{ €}$$

c) Calcular el valor actual en función del tanto anual *i* :

Hasta ahora, cuando era una renta fraccionada, hemos calculado el valor actual V_A en función de i_k por ello si el tanto de valoración era anual i o era el nominal J_k , buscábamos su equivalente i_k , pero también se puede hacer al revés transformado la renta fraccionada en función del tanto anual **i**.

Para calcular el valor actual, partiendo de la expresión:

$$V_A = \alpha \cdot \;_{nk\;\, i_k} = \alpha \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-nk}}{i_k} \qquad (1)$$

vamos a tratar de transformar la expresión (1) y ponerla en función del tanto anual ***i.***

Para ello debemos recordar lo visto anteriormente:

- El montante obtenido al invertir una unidad monetaria al tanto k-esimal i_k durante **nk** períodos es el mismo que se obtiene al invertir al tanto anual i durante **n** años:

$$(1+i_k)^{nk} = (1+i)^n$$

- El tanto k-esimal i_k es el resultado de dividir el tanto nominal J_k entre el número de k-ésimos en que se fracciona el año:

$$i_k = \frac{J_k}{k}$$

Sustituyendo dichos valores en la expresión (1), resulta:

$$V_A = \alpha \cdot \;_{nk\;\, i_k} = \alpha \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-nk}}{i_k} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{J_k}{k}}$$

Si multiplicamos el numerador y denominador por i, su valor no varía y la expresión queda de la forma:

$$_{nk\ i_k} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\frac{J_k}{k}} = \frac{\frac{1-(1+i)^{-n}}{1}}{\frac{J_k}{k}} = \frac{k\cdot\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{J_k} = k\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot\frac{i}{J_k}$$

que podemos expresar como:

$$\boxed{_{nk\ i_k} = k\cdot \ _{n\ i}\cdot\frac{i}{J_k}}$$

que nos determina el **valor actual de una renta unitaria fraccionada en función del tanto de interés anual *i*.**

Si la renta es de cuantía α, su valor actual será:

$$\boxed{V_A = \alpha\cdot k\cdot \ _{n\ i}\cdot\frac{i}{J_k}}$$

El cálculo del tanto nominal $\mathbf{J_k}$ correspondiente al tanto de interés anual $\boldsymbol{i}$ puede obtenerse mediante la expresión ya conocida:

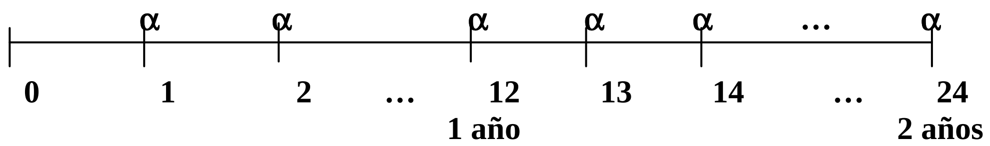
$$J_k = k\cdot\left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right]$$

Ejemplo:

Una institución educativa me ofrece en concepto de beca 5.000 € al final de cada mes durante 2 años. ¿Qué capital equivalente a todas las mensualidades debería percibir hoy si la valoración se hace al 6% de interés compuesto anual?

Solución:

Gráficamente:



$$J_k = k\cdot\left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right] = 12\left[(1+0'06)^{\frac{1}{12}} - 1\right] = 0'05841060678$$

$$\boldsymbol{V_A = \alpha\cdot k\cdot \ _{n\ i}\cdot\frac{i}{J_k} = \alpha\cdot k\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot\frac{i}{J_k} = 5000\times 12\times\frac{1-(1+0'06)^{-2}}{0'06}\times\frac{0'06}{0'05841060678} = 112996'83\ €.}$$

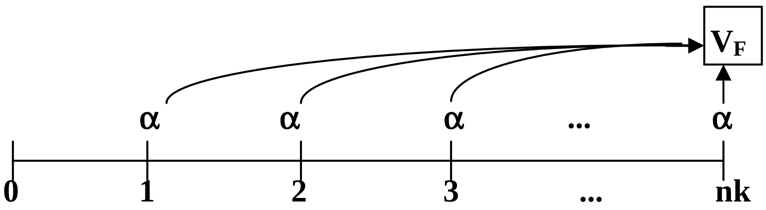
D. Valor final de la renta fraccionada:

El valor final de la renta es el valor de todos los capitales que la componen, referidos al momento final de la duración de la renta.

Si la renta es inmediata, pospagable, de ***nk***, términos y cuantía α, podremos calcular su valor final de varias formas, de las que destacaremos las dos siguientes:

a) **Capitalizando cada término**, por el tiempo que media entre su vencimiento y el momento ***nk*** al tipo de interés k-esimal i_k.

Gráficamente:



Su valor será:

$$V_F = \alpha \cdot (1+i_k)^{nk-1} + \alpha \cdot (1+i_k)^{nk-2} + \ldots + \alpha \cdot (1+i_k) + \alpha$$

Sacando factor común a α resulta:

$$V_F = \alpha \cdot \left[(1+i_k)^{nk-1} + (1+i_k)^{nk-2} + \ldots + (1+i_k) + 1 \right]$$

El corchete recoge el valor final de la renta unitaria, de ***nk*** términos, valorada al tanto k-esimal correlativo i_k que expresaremos como $S_{nk\ i_k}$.

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado para el calcular el valor final de una renta anual constante, llegaríamos a la expresión:

$$\boxed{V_F = \alpha \cdot S_{nk\ i_k} = \alpha \cdot \frac{(1+i_k)^{nk} - 1}{i_k}}$$

que es el **valor final V_F de una renta fraccionada constante inmediata pospagable de *nk* términos de cuantía α cada uno y valorada al tanto de interés compuesto k-esimal i_k.**

Si $\alpha = 1$, resulta $\boxed{V_F = S_{nk\ i_k}}$

que es el **valor final V_F de una renta unitaria fraccionada constante inmediata pospagable de *nk* términos, valorada al tipo de interés compuesto k-esimal i_k.**

b) **Capitalizando el valor actual** obtenido anteriormente por los **nk** períodos al tipo de interés k-esimal i_k.

$$V_F = V_A \cdot (1+i_k)^{nk} = \alpha \quad {}_{nk\ i_k} \cdot (1+i_k)^{nk}$$

Dado que $\quad {}_{nk\ i_k} \cdot (1+i_k)^{nk} = S_{nk\ i_k}$

resulta:

$$\boxed{V_F = \alpha \cdot S_{nk\ i_k}}$$

Lógicamente, las expresiones obtenidas en a) y b) son iguales, y nos determinan el valor final de la renta fraccionada en función del tanto k-esimal i_k.

Ejemplo:

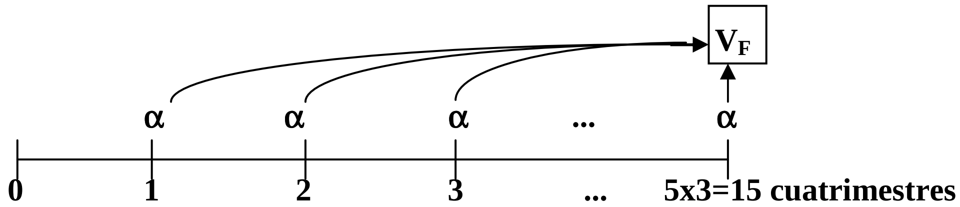
Una persona aporta a un Fondo de pensiones 4.000 € al final de cada cuatrimestre durante 5 años. Calcular el capital constituido en dicho Fondo al cabo de los 5 años, si éste capitaliza:

a) al 3% de interés compuesto cuatrimestral.

b) Al 9% de interés compuesto anual.

Solución caso a):

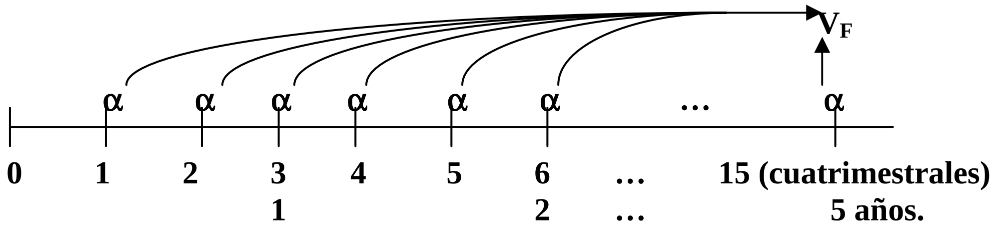
Gráficamente:



$$V_F = \alpha \cdot S_{nk\ i_k} = \alpha \cdot \frac{(1+i_k)^{nk}-1}{i_k} = 4000\frac{(1+0'03)^{5x3}}{0'03} = 74395'66\ €.$$

Solución caso b):

Gráficamente:



Para resolver el problema, hallaremos primero el tanto k-esimal equivalente. En este caso:

$$(1+i)^n = (1+i_k)^{nk} \Rightarrow (1+i) = (1+i_3)^3 \Rightarrow i_3 = (1+0{,}09)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0{,}02914246657$$

Y sustituyendo datos en la expresión del valor final:

$$V_F = \alpha \cdot S_{nk\ i_k} = \alpha \cdot \frac{(1+i_k)^{nk}-1}{i_k} = 4000\frac{(1+0{,}02914246657)^{15}-1}{0{,}02914246657} = 73929{,}77€$$

Vemos que el capital constituido no es el mismo en el caso a) que en el b).

Al 3% cuatrimestral, el capital constituido es 74.395,66 €.

Al 9% anual, el capital constituido es 73.929,77 €.

Es mayor el capital constituido al 3% cuatrimestral, porque el tanto anual equivalente no es el 9% sino el 9,2727%, al acumular los intereses de forma cuatrimestral.

$$(1+i)^n = (1+i_k)^{nk} \Rightarrow (1+i) = (1+i_3)^3 \Rightarrow i = (1+0{,}03)^3 - 1 = 0{,}92727 \Rightarrow 9{,}2727\%$$

c) Calcular el valor final de una renta fraccionada en función de *i* :

Hasta ahora, cuando era una renta fraccionada, hemos calculado el valor final V_F en función de i_k por ello si el tanto de valoración era anual i o era el nominal J_k , buscábamos su equivalente i_k , pero también se puede hacer al revés transformado la renta fraccionada en función del tanto anual **i**.

Para calcular el valor final, capitalizaremos el valor actual en función del tanto anual ***i,*** aplicando la expresión:

$$V_F = V_A \cdot (1+i)^n = \alpha \cdot k \cdot \ {}_{n\ i} \cdot \frac{i}{J_K} (1+i)^n$$

Dado que $\quad {}_{n\ i} \cdot (1+i)^n = S_{n\ i}$

resulta: $$\boxed{V_F = \alpha \cdot k \cdot S_{n\ i} \cdot \frac{i}{J_k}}$$

expresión que determina el valor final de la renta fraccionada en función del tanto de interés compuesto anual ***i***.

El cálculo del tanto nominal J_k correspondiente al tanto de interés anual i puede obtenerse mediante la expresión ya conocida:

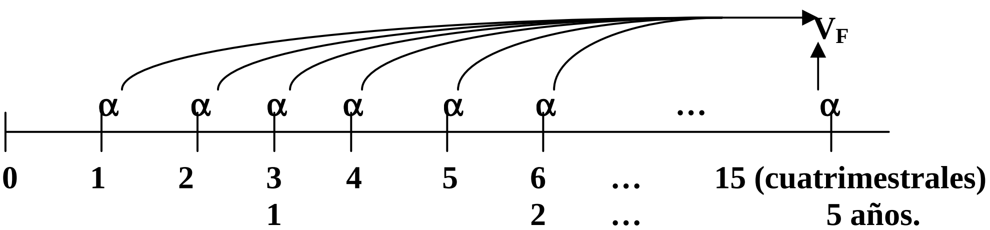
$$J_k = k \cdot \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right]$$

Ejemplo:

Una persona aporta a un Fondo de pensiones 4.000 € al final de cada cuatrimestre durante 5 años. Calcular el capital constituido en dicho Fondo al cabo de los 5 años, si éste capitalizado al 9% de interés compuesto anual.

Resolución:

Gráficamente:



$$J_k = k \cdot \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right] = 3 \cdot \left[(1+0'09)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] = 0'08742739971$$

$$V_A = \alpha \cdot k \cdot S_{n\ i} \cdot \frac{i}{J_K} = \alpha \cdot k \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot \frac{i}{J_k} = 4000 \, x \, 3 \, x \frac{(1+0'09)^5}{0'09} \, x \frac{0'09}{0'08742739971} = 73930'77 \text{ €.}$$

E. <u>Perpetuidad</u>:

El cálculo del valor actual de la renta que estamos estudiando, cuando el número de términos es infinito, puede hacerse también bajo dos supuestos: que el tanto sea **k-esimal** y referido al mismo tiempo que la periodicidad de la renta, o que el tanto sea **anual.**

En ambos casos el problema se resuelve hallando el límite de las expresiones ya calculadas de **V_A**, cuando **n** tiende a infinito.

a) <u>En función del tanto k-esimal</u>:

Partiendo de la expresión:

$$V_A = \alpha \quad {}_{nk\ \ i_k}$$

en la que

$${}_{nk\ \ i_k} = \frac{1-(1+i_k)^{-nk}}{i_k}$$

tomando límites resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \quad {}_{nk\ \ i_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i_k)^{-nk}}{i_k} = \frac{1-\dfrac{1}{(1+i_k)^{nk}}}{i_k} = \frac{1-\dfrac{1}{\infty}}{i_k} = \frac{1-0}{i_k} = \frac{1}{i_k}$$

Por tanto, **el valor actual de una renta perpetua fraccionada de cuantía α será:**

$$\boxed{V_A = \alpha \cdot \frac{1}{i_k}}$$

b) <u>En función del tanto anual</u>:

Partiendo de la expresión:

$$V_A = \alpha \cdot k \cdot \quad {}_{n\ \ i} \cdot \frac{i}{J_k}$$

Calculemos su límite cuando **n** tiende a infinito. Como ya sabemos:

$$\lim_{n\to\infty} \quad {}_{n\ \ i} = \frac{1}{i}$$

por lo que la expresión anterior resultará:

$$V_A = \alpha \cdot k \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{J_k}$$

que simplificando quedará:

$$\boxed{V_A = \alpha \cdot k \cdot \frac{1}{J_k}}$$

Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta perpetua inmediata pospagable de 8.000 € trimestrales, se valora:

c) al 4% de interés compuesto trimestral.
d) Al 10% de interés compuesto anual.

Solución caso a)*:*

Gráficamente:

	α	α	α	α	α	α	…	
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**	**8**	**…**	**∞ (trimestres)**
				1		**2**	**…**	**∞ años.**

Como el tanto de interés es el 4% trimestral, el valor actual de la renta propuesta será:

$$V_A = \alpha \cdot \frac{1}{i_k} = 8000 \cdot \frac{1}{0'04} = 200000\ €.$$

Solución caso b):

$$J_k = k \cdot \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right] = 4 \cdot \left[(1+0'10)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] = 0'09645475633$$

$$V_A = \alpha \cdot k \cdot \frac{1}{J_K} = \alpha \cdot k \cdot \frac{1}{J_k} = 8000 x 4 x \frac{1}{0'09645475633} = 331761'76\ €.$$

F. Cálculo de cualquier elemento de la renta fraccionada en función del valor actual o final:

Todo lo visto anteriormente para las rentas anuales es aplicable a las rentas fraccionadas, con la premisa, siempre, de que debe darse la correspondiente correlación entre el tanto y el tiempo. Así con las expresiones:

$$V_A = \alpha \cdot {}_{nk\ \ i_k} = \alpha \cdot \frac{1-(1+i_k)^{-nk}}{i_k}$$

$$V_F = \alpha \cdot S_{nk\ \ i_k} = \alpha \cdot \frac{(1+i_k)^{nk} - 1}{i_k}$$

podemos hallar uno de los cuatro componentes cuando conozcamos los otros tres.

a) Cálculo de la cuota α:

Si en la expresión: $V_A = \alpha \cdot {}_{nk\ \ i_k}$

conocemos el valor actual de la renta V_A, el número de términos nk que componen la renta y el tanto de valoración i_k, el valor de α será:

$$\alpha = \frac{V_A}{{}_{nk\ \ i_k}}$$

Si en la expresión: $V_A = \alpha \cdot S_{nk\ \ i_k}$

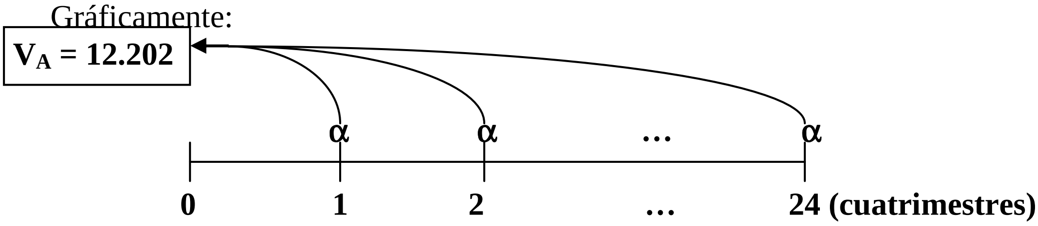
conocemos el valor actual de la renta V_F, el número de términos nk que componen la renta y el tanto de valoración i_k, el valor de α será:

$$\alpha = \frac{V_F}{S_{nk\ \ i_k}}$$

Ejemplo 1º: Se contrata un préstamo de 12.202 € para amortizar mediante una renta cuatrimestral, constante, de 24 términos. Si el tanto del préstamo es el 5% cuatrimestral, determinar la cuantía a pagar cada cuatrimestre.

Resolución:

Gráficamente:

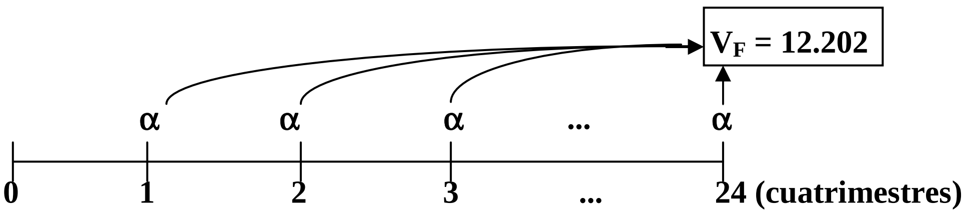


$$\alpha = \frac{V_A}{_{nk\ i_k}} = \frac{12202}{\dfrac{1-(1+0{,}05)^{-24}}{0{,}05}} = 884{,}29\ €$$

Ejemplo 2º: Averiguar el capital que deberemos imponer al final de cada cuatrimestre y durante 8 años, en un Fondo que capitaliza al 5% cuatrimestral, si se desea reconstruir un capital de 12.202 € en ese tiempo.

Resolución:

Gráficamente:



$$\alpha = \frac{V_F}{S_{nk\ i_k}} = \frac{12202}{\dfrac{(1+0{,}05)^{24}-1}{0{,}05}} = 274{,}19\ €$$

b) **Cálculo del tanto k-esimal:**

Si conocemos el valor actual de una renta de nk términos de cuantía α, y deseamos calcular el tanto de interés k-esimal i_k al que se valoró, partiendo de la expresión:

$$V_A = \alpha \cdot \ _{nk\ i_k}$$

en la que conocemos V_A, α y nk despejando $_{nk\ i_k}$ resulta: $_{nk\ i_k} = \frac{V_A}{\alpha}$

siendo el cociente V_A/α un valor conocido.

Con la ayuda de la Tabla III podemos calcular el valor de i_k, bien de forma inmediata, bien por interpolación, de la misma forma que como hicimos anteriormente.

Si conocemos el valor final una renta de nk términos de cuantía α, y deseamos calcular el tanto de interés k-esimal i_k al que se valoró, partiendo de la expresión:

$$V_A = \alpha \cdot S_{nk\ i_k}$$

en la que conocemos V_F, α y nk despejando $S_{nk\ i_k}$ resulta: $S_{nk\ i_k} = \frac{V_F}{\alpha}$

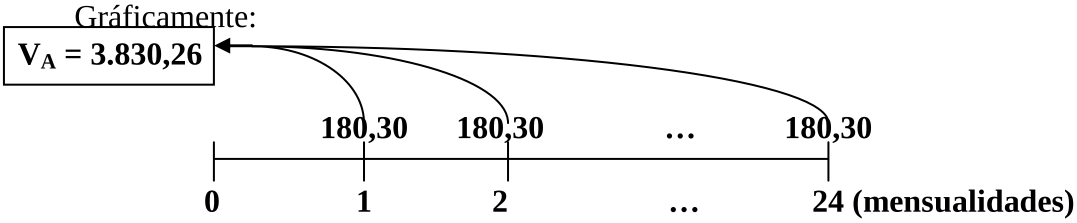
siendo el cociente V_F/α un valor conocido.

Con la ayuda de la Tabla V podemos calcular el valor de i_k, bien de forma inmediata, bien por interpolación, de la misma forma que como hicimos anteriormente.

<u>Ejemplo 1º</u>: Una empresa vende un equipo industrial al contado por 3.830,26 €, o, si no, en 24 mensualidades pospagable de 180,30 € cada una. Calcular el tanto de interés compuesto mensual al que resulta la financiación de forma aplazada.

Resolución:

Gráficamente:



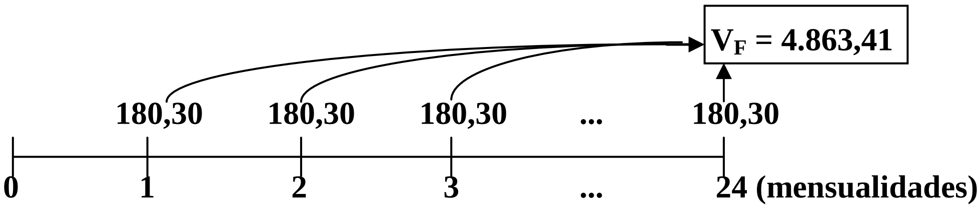
$$ {}_{nk\;\; i_k} = \frac{V_A}{\alpha} = \frac{3830{,}26}{180{,}30} = 21{,}2438158625 $$

Buscando en las Tabla III, en la fila correspondiente a 24 términos, encontramos el valor 21,243387 en la columna del 1%, no es un valor exacto, pero si aproximado, ya que, en nuestro caso, es menor del 1% y superior a 0,9. Aunque podríamos especular, si quisiéramos una mayor exactitud.

<u>Ejemplo 2º</u>: Averiguar el tanto mensual al que capitaliza un Fondo en el que se han impuesto 24 mensualidades pospagables de 180,30 € cada una, si el capital constituido en ese tiempo es de 4.863,41 €.

Resolución:

Gráficamente:



$$ S_{nk\;\; i_k} = \frac{V_F}{\alpha} = \frac{4863{,}41}{180{,}30} = 26{,}9739877981 $$

Buscando en las Tabla V, en la fila correspondiente a 24 términos, encontramos el valor 26,973464 en la columna del 1%, no es un valor exacto, pero si aproximado, ya que, en nuestro caso, es menor del 1% y superior a 0,9. Aunque podríamos especular, si quisiéramos una mayor exactitud

c) <u>Cálculo del número de términos</u>:

Para calcular el número de términos que componen una renta constante fraccionada, conocido su valor actual V_A, el tanto de interés k-esimal i_k y la cuantía α de cada término, dado que ha de cumplirse siempre que el valor actual de la renta sea igual a la suma de los valores actuales de todos los términos, resulta:

$$ V_A = \alpha \cdot \;{}_{nk\;\; i_k} $$

de donde:

$$ {}_{nk\;\; i_k} = \frac{V_A}{\alpha} $$

Con la ayuda de la Tabla III podemos buscar el valor del cociente V_A/α en la columna del tanto de interés i_k, el cual determinará el número de términos buscados, bien de forma inmediata, bien por interpolación, ya que, como vimos también en el estudio de las rentas anuales, el número de términos puede ser entero o no entero.

Para calcular el número de términos que componen una renta constante fraccionada, conocido su valor final V_F , el tanto de interés k-esimal i_k y la cuantía α de cada término, dado que ha de cumplirse siempre que el valor actual de la renta sea igual a la suma de los valores actuales de todos los términos, resulta:

$$V_A = \alpha \cdot S_{nk\ \ i_k}$$

de donde:

$$S_{nk\ \ i_k} = \frac{V_F}{\alpha}$$

Con la ayuda de la Tabla V podemos buscar el valor del cociente V_F/α en la columna del tanto de interés i_k , el cual nos determinará el número de términos buscados, bien de forma inmediata, bien por interpolación, ya que, como vimos también en el estudio de las rentas anuales, el número de términos puede ser entero o no entero

También se puede calcular de la siguiente manera, cuando se trata del valor actual:

$${}_{nk\ \ i_k} = \frac{V_A}{\alpha} \Rightarrow \frac{1 - (1+i_k)^{-nk}}{i_k} = \frac{V_A}{\alpha} \Rightarrow 1 - (1+i_k)^{-nk} = \frac{V_A \cdot i_k}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(1+i_k)^{-nk} = \frac{V_A \cdot i_k}{\alpha} - 1 \Rightarrow log\left(-(1+i_k)^{-nk}\right) = log\left(\frac{V_A \cdot i_k}{\alpha} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log\left(-(1+i_k)^{-nk}\right) = log\frac{V_A \cdot i_k}{\alpha} - log\,1 \Rightarrow nk \cdot log(1+i_k) = log(V_A \cdot i_k) - log\,\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow nk \cdot log(1+i_k) = log V_A + log(i_k) - log\alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{nk = \frac{log V_A + log(i_k) - log\alpha}{log(1+i_k)}}$$

También se puede calcular de la siguiente manera cuando se trata del valor final:

$$S_{nk\ \ i_k} = \frac{V_F}{\alpha} \Rightarrow \frac{(1+i_k)^{nk} - 1}{i_k} = \frac{V_F}{\alpha} \Rightarrow (1+i_k)^{nk} - 1 = \frac{V_F \cdot i_k}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+i_k)^{nk} = \frac{V_F \cdot i_k}{\alpha} + 1 \Rightarrow log\,(1+i_k)^{nk} = log\left(\frac{V_F \cdot i_k}{\alpha} + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log\,(1+i_k)^{nk} = log\frac{V_F \cdot i_k}{\alpha} + log\,1 \Rightarrow nk \cdot log(1+i_k) = log(V_F \cdot i_k) - log\,\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow nk \cdot log(1+i_k) = log V_F + log(i_k) - log\alpha \Rightarrow$$

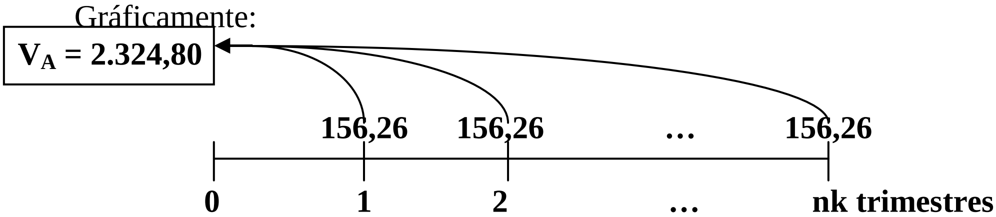
$$\boxed{nk = \frac{log V_F + log(i_k) - log\alpha}{log(1+i_k)}}$$

Ejemplo 1º:

Una institución financiera concede un préstamo de 2.324,80 € para amortizar mediante pagos trimestrales pospagales de 156,26 € cada uno. Si el tanto de la operación se fija en el 3% trimestral, determinar el número de pagos trimestrales que habrá que realizar para amortizar dicho préstamo.

Resolución:

Gráficamente:



$$a_{\overline{nk}|i_k} = \frac{V_A}{\alpha} = \frac{2324,80}{156,26} = 14,8777678229$$

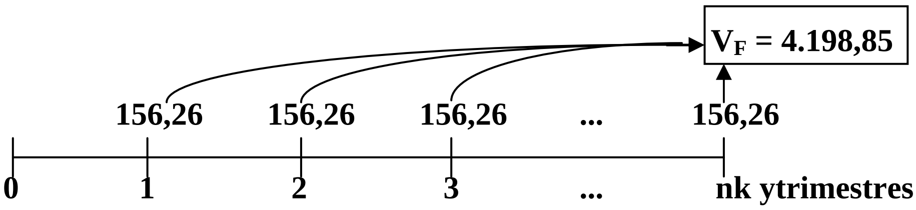
Buscando en las Tabla III, en la columna del 3% encontramos para n=20 el valor 14,877475, lo que indica que deberán hacerse 20 pagos trimestrales de 156,26 € para cancelar el préstamo concedido.

Ejemplo 2º:

Averiguar cuántas imposiciones trimestrales de 156,26 €, pospagables, habrán de depositarse en un Fondo que capitaliza al 3% trimestral, para reconstruir un capital de 4.198,85.

Resolución:

Gráficamente:



$$S_{\overline{nk}|i_k} = \frac{V_F}{\alpha} = \frac{4198,85}{156,26} = 26,8709202611$$

Buscando en las Tabla V, en la columna del 3%, encontramos para n=20 el valor 26,870374, lo que indica que deberán hacerse 20 pagos trimestrales de 156,26 para constituir el capital indicado.

También se puede hacer aplicado la siguiente expresión:

$$nk = \frac{\log V_F + \log(i_k) - \log\alpha}{\log(1+i_k)} = \frac{\log 4198,85 + \log 0,03 - \log 156,26}{\log(1+0,03)} =$$

G. **<u>Valor actual y final de una renta fraccionada cuyo primer vencimiento tiene lugar en un momento cualquiera</u>:**

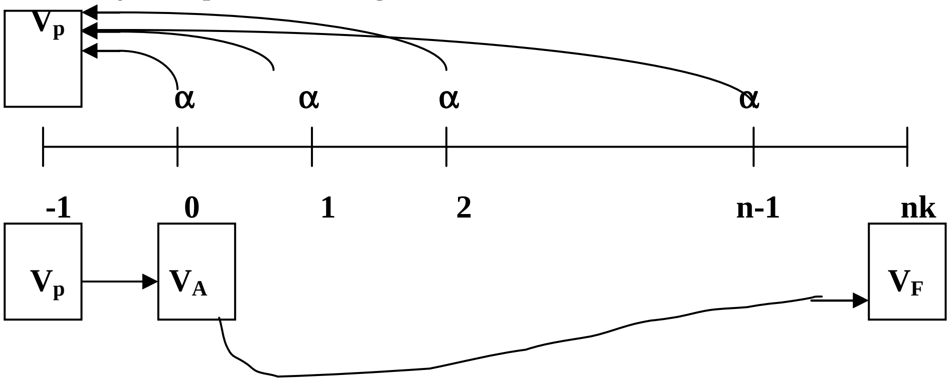
Cuando la renta sea distinta de la inmediata pospagable, seguiremos los mismos criterios que los que hemos visto para calcular el valor actual y su valor final, por lo que no haremos aquí más incidencia en su exposición teórica.

Recordemos la conveniencia de representar gráficamente la renta que se quiera estudiar, porque a la vista del gráfico, la determinación de la expresión a utilizar es inmediata.

Vamos haber a continuación los otros tipos de rentas que nos queda, es decir: la inmediata prepagable, la diferida pospagable y diferida prepagable.

a) **<u>Inmediata prepagable</u>*:***

Como se trata de una renta inmediata prepagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento cero, y su representación gráfica es:



1) Valor actual, final y perpetuo en función del tanto de interés i_k

- ***Valor actual:***

Partiendo de la expresión ya conocida cuando la renta es inmediata pospagable, obtenemos el valor de la renta en el momento anterior al primer vencimiento, es decir en este caso en el momento **–1,** en valor aquí de la renta es $\mathbf{V_p}$. Si después capitalizamos dicho valor $\mathbf{V_p}$ al momento cero, obtenemos el $\mathbf{V_A}$ **.** Por tanto ahora la formula sería:

$$\boxed{\mathbf{V_A} = V_p \cdot \left(1 + \mathrm{i_k} \cdot n\right) = \left[\alpha \cdot \frac{\mathbf{1 - \left(1 + i_k\right)^{-nk}}}{i_k}\right]\left(1 + i_k \cdot n\right)}$$

- ***Valor final:***

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A\left(1 + i_k\right)^{nk}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$\boxed{V_F = \left[\alpha \cdot S_{nk \ \ i_k}\right]\left(1 + i_k \cdot n\right) = \left(\alpha \cdot \frac{\left(1 + i_k\right)^{nk} - 1}{i_k}\right)\left(1 + i_k \cdot n\right)}$$

♦ ***Valor actual cuando es una renta perpetua:***

Si la renta fuera perpetua prepagable utilizaríamos la expresión:

$$V_A = \left(\frac{\alpha}{i_k} \right) (1 + i_k \cdot n)$$

2) *Valor actual, final y perpetuo en función del tanto de interés i*

Podemos realizarlo de dos formas, o buscando el equivalente $\boldsymbol{i_k}$ a través de las fórmulas siguientes según el tanto sea anual o nominal:

$$\boldsymbol{i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{i_k = \frac{j_k}{k}}$$

o también transformado la renta fraccionada en función del tanto anual, así como veremos a continuación:

♦ ***Valor actual:***

Para calcular en valor actual en función del tanto de interés anual **i**, partiremos de la expresión conocida cuando la renta es inmediata pospagable en función del tanto de interés anual **i**:

$$V_A = \alpha \cdot k \quad {}_{n\ i} \cdot \frac{i}{J_k}$$

obtenemos el valor de la renta en el momento anterior al primer vencimiento, es decir en este caso en el momento **–1,** en valor aquí de la renta es $\mathbf{V_p}$. Si después capitalizamos dicho valor $\mathbf{V_p}$ al momento cero, obtenemos el $\mathbf{V_A}$ **.**

$$\boxed{V_A = V_p \cdot \left(1 + i \cdot \frac{1}{k}\right) = \left(\alpha \cdot k \quad {}_{n\ i} \cdot \frac{i}{J_k}\right)\left(1 + i \cdot \frac{1}{k}\right)}$$

♦ ***Valor final:***

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A \cdot (1+i)^{\frac{n}{k}}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$\boxed{\boldsymbol{V_F = \left[\alpha \cdot k \cdot S_{n\ i} \cdot \frac{i}{J_k}\right]\left(1 + i \cdot \frac{1}{k}\right) = \left(\alpha \cdot k \cdot \frac{(1+i)^{\frac{n}{k}} - 1}{i}\right)\left(1 + i \cdot \frac{1}{k}\right)}}$$

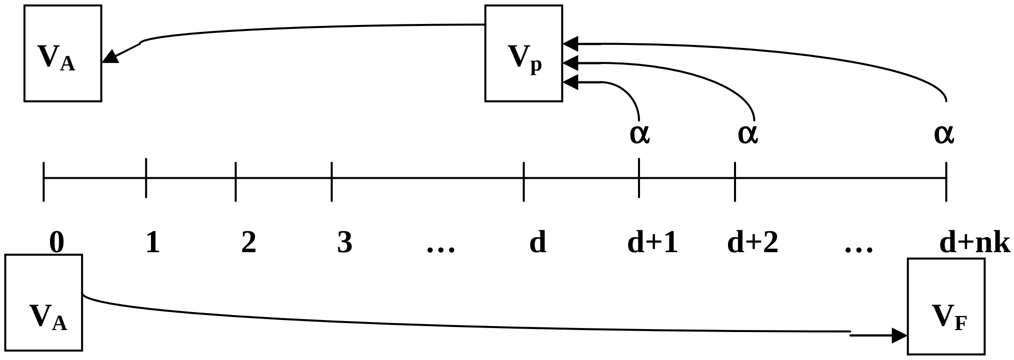
♦ ***Valor actual cuando es una renta perpetua:***

Si la renta fuera perpetua prepagable utilizaríamos la expresión:

$$\boxed{V_A = \left(\alpha \cdot k \cdot \frac{1}{J_k}\right)\left(1 + i \cdot \frac{1}{k}\right)}$$

b) Renta diferida pospagable:

A ser una renta diferida **d años** pospagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **d+1**, y su representación gráfica es:



1) Valor actual, final y perpetuo en función del tanto de interés i_k

♦ ***Valor actual:***

Partiendo de la expresión ya conocida cuando la renta es inmediata pospagable:

$$\mathbf{V_A} = \alpha \cdot {}_{\mathbf{nk}\ \mathbf{i_k}} = \alpha \cdot \frac{\mathbf{1 - (1 + i_k)}^{-nk}}{i_k}$$

Para calcular el valor en el momento cero, es decir el valor actual $\mathbf{V_A}$ de la renta, actualizaremos el valor en el momento **d,** es decir $\mathbf{V_p}$ hasta ese momento cero osea **d años,** y así:

$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1 + \mathrm{i_k})^{-dk}$$

por tanto ahora la formula sería:

$$\boxed{\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1 + \mathrm{i_k})^{-dk} = \left[\alpha \cdot \frac{\mathbf{1 - (1 + i_k)}^{-nk}}{i_k}\right](1 + i_k)^{-dk}}$$

♦ ***Valor final:***

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A (1 + i_k)^{(n+d)k}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$\boxed{V_F = \alpha \cdot S_{nk\ i_k} = \alpha \cdot \frac{(1 + i_k)^{nk} - 1}{i_k}}$$

♦ ***Valor actual cuando es una renta perpetua:***

Si la renta fuera perpetua diferida pospagable utilizaríamos la expresión:

$$\boxed{V_A = \left(\frac{\alpha}{i_k}\right)(1 + i_k)^{-dk}}$$

2) Valor actual, final y perpetuo en función del tanto de interés i

Podemos realizarlo de dos formas, o buscando el equivalente $\boldsymbol{i_k}$ a través de las fórmulas siguientes según el tanto sea anual o nominal:

$$i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \qquad \text{o} \qquad i_k = \frac{j_k}{k}$$

o también transformado la renta fraccionada en función del tanto anual, así como veremos a continuación:

- ***Valor actual:***

Para calcular en valor actual en función del tanto de interés anual **i**, partiremos de la expresión conocida cuando la renta es inmediata pospagable en función del tanto de interés anual **i**:

$$V_A = \alpha \cdot k \cdot {}_{n\;i} \frac{i}{J_K}$$

obtenemos el valor de la renta en el momento del deferimiento, es decir en este caso en el momento **d,** en valor aquí de la renta es $\mathbf{V_p}$. Si después capitalizamos dicho valor $\mathbf{V_p}$ al momento cero, obtenemos el $\mathbf{V_A}$ **.**

$$\boxed{V_A = V_p (1+i)^{-\frac{d}{k}} = \left(\alpha \cdot k \cdot {}_{n\;i} \frac{i}{J_K} \right) (1+i)^{-\frac{dk}{k}}}$$

- ***Valor final:***

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A (1+i)^{\frac{(d+n)k}{k}}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$\boxed{V_F = \alpha \cdot k \cdot S_{n\;i} \cdot \frac{i}{J_k} = \alpha \cdot \frac{(1+i)^{\frac{n}{k}} - 1}{i}}$$

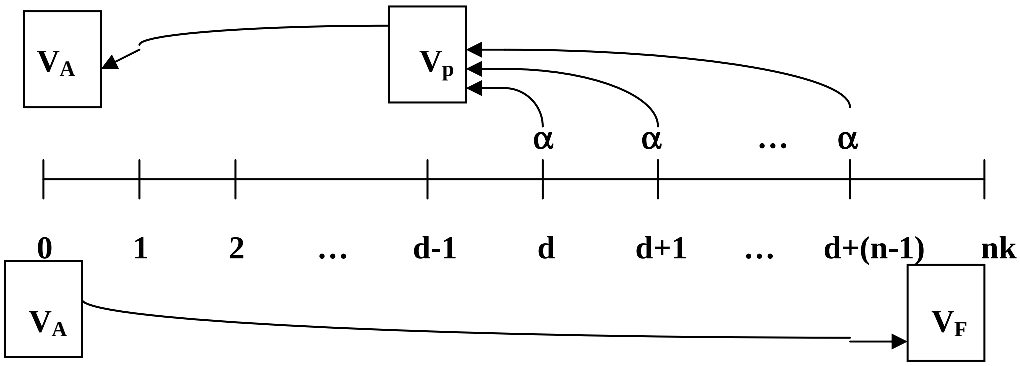
- ***Valor actual cuando es una renta perpetua:***

Si la renta fuera perpetua diferida pospagable utilizaríamos la expresión:

$$\boxed{V_A = \left(\alpha \cdot k \cdot \frac{1}{J_k} \right) (1+i)^{-\frac{dk}{k}}}$$

c) **Renta diferida prepagable**:

A ser una renta diferida **d años** prepagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **d**, y su representación gráfica es:



1) Valor actual, final y perpetuo en función del tanto de interés i_k

♦ ***Valor actual:***

Partiendo de la expresión ya conocida cuando la renta es inmediata pospagable:

$$\mathbf{V_A} = \alpha \cdot {}_{\mathbf{nk}\ \mathbf{i_k}} = \alpha \cdot \frac{\mathbf{1 - (1 + i_k)}^{-nk}}{i_k}$$

obtenemos el valor de la renta en el momento anterior al primer vencimiento, es decir en este caso en el momento **d-1,** en valor aquí de la renta es $\mathbf{V_p}$ ..

$$\mathbf{V_p} = \alpha \cdot {}_{\mathbf{nk}\ \mathbf{i_k}} = \alpha \cdot \frac{\mathbf{1 - (1 + i_k)}^{-nk}}{i_k}$$

Para calcular el valor en el momento cero, es decir el valor actual $\mathbf{V_A}$ de la renta, actualizaremos el valor en el momento **d-1,** es decir $\mathbf{V_p}$ hasta ese momento cero osea **d-1 años,** y así:

$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1 + \mathrm{i_k})^{-(dk-1)}$$

por tanto ahora la formula sería:

$$\boxed{\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1 + \mathrm{i_k})^{-(dk-1)} = \left[\alpha \cdot \frac{\mathbf{1 - (1 + i_k)}^{-nk}}{i_k}\right](1 + i_k)^{-(dk-1)}}$$

♦ ***Valor final:***

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A(1 + i_k)^{(n+d)k}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$\boxed{V_F = \left(\alpha \cdot S_{nk\ \ i_k}\right)\left(1 + i_k \cdot \frac{1}{k}\right) = \left(\alpha \cdot \frac{(1 + i_k)^{nk} - 1}{i_k}\right)\left(1 + i_k \cdot \frac{1}{k}\right)}$$

- ***Valor actual cuando es una renta perpetua:***

Si la renta fuera perpetua diferida prepagable utilizaríamos la expresión:

$$\boxed{V_A = \left(\frac{\alpha}{i_k}\right)(1+i_k)^{-(dk-1)}}$$

2) *Valor actual, final y perpetuo en función del tanto de interés i*

Podemos realizarlo de dos formas, o buscando el equivalente $\boldsymbol{i_k}$ a través de las fórmulas siguientes según el tanto sea anual o nominal:

$$\boldsymbol{i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{i_k = \frac{j_k}{k}}$$

o también transformado la renta fraccionada en función del tanto anual, así como veremos a continuación:

- ***Valor actual:***

Para calcular en valor actual en función del tanto de interés anual **i**, partiremos de la expresión conocida cuando la renta es inmediata pospagable en función del tanto de interés anual **i**:

$$V_A = \alpha \cdot k \cdot \;_{n\ i} \frac{i}{J_K}$$

obtenemos el valor de la renta en el momento del deferimiento, es decir en este caso en el momento **d-1,** en valor aquí de la renta es $\mathbf{V_p}$. Si después actualizamos dicho valor $\mathbf{V_p}$ al momento cero, obtenemos el $\mathbf{V_A}$ **.**

$$\boxed{\boldsymbol{V_A = V_p(1+i)^{-\left(\frac{dk-1}{k}\right)} = \left(\alpha \cdot k \cdot \;_{n\ i} \frac{i}{J_K}\right)(1+i)^{-\left(\frac{dk-1}{k}\right)}}}$$

- ***Valor final:***

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A(1+i)^{\frac{d+n}{k}}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$\boxed{V_F = [\alpha \cdot k \cdot S_{n\ i}]\left(1 + i \cdot \frac{1}{k}\right) = \left(\alpha \cdot k \cdot \frac{(1+i)^{\frac{n}{k}} - 1}{i}\right)\left(1 + i \cdot \frac{1}{k}\right)}$$

- ***Valor actual cuando es una renta perpetua:***

Si la renta fuera perpetua diferida prepagable utilizaríamos la expresión:

$$\boxed{\boldsymbol{V_A = \left(\alpha \cdot k \cdot \frac{1}{J_k}\right)(1+i)^{-\frac{dk-1}{k}}}}$$

EJEMPLOS:

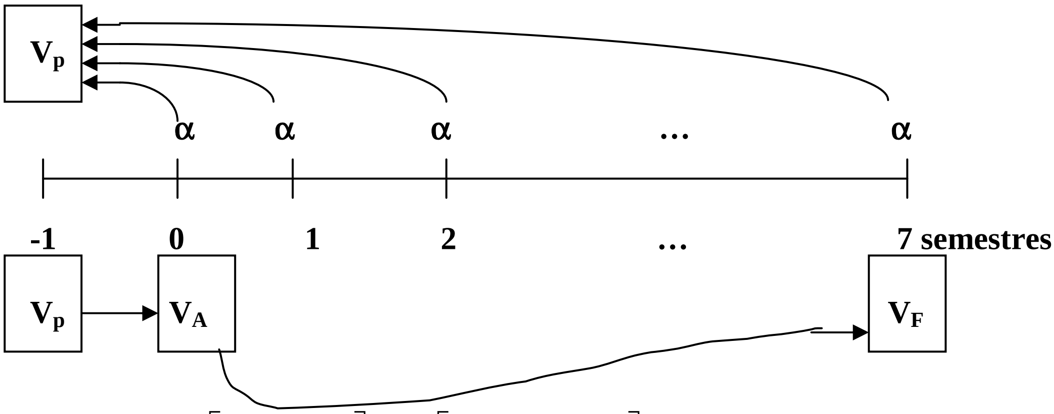
Ejemplo 1º:

Calcular el valor actual y final de una renta de 10.000 € semestrales durante 4 años, valorada al 7% de interés compuesto anual, si la renta es:

(a) Inmediata prepagable.
(b) Inmediata pospagable.
(c) Diferida 6 años y prepagable.
(d) Diferida 6 años y pospagable.

Solución caso a):

Como se trata de una renta inmediata prepagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento cero, y su representación gráfica es:



$$J_k = k \cdot \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right] = 2 \cdot \left[(1+0'07)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = 0'06881608655$$

$$V_A = V_p (1+i)^{\frac{1}{k}} = \left(\alpha \cdot k \cdot {}_{n\ i} \frac{i}{J_K} \right)\left(1 + i \cdot \frac{1}{k} \right) = \left(\alpha \cdot k \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot \frac{i}{J_K} \right)\left(1 + i \cdot \frac{1}{k} \right) =$$

$$= \left(10000x2x\frac{1 - (1+0'07)^{-4}}{0'07} x \frac{0'07}{0'06881608655} \right)\left(1 + 0'07 \cdot \frac{1}{2} \right) = 71321'54 \text{ €.}$$

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A (1+i)^n = 71321'54 (1+0'07)^4 = 93487'99 \text{ €.}$$

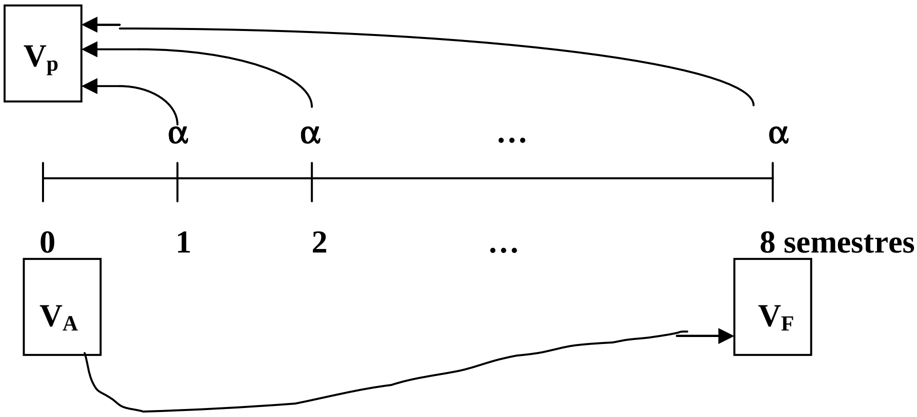
O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$V_F = \left(\alpha \cdot k \cdot S_{n\ i} \cdot \frac{i}{J_K} \right)\left(1 + i + \frac{1}{k} \right) =$$

$$= \left(10000\,x\,2\,x\frac{(1+0'07)^4 - 1}{0'07} x \frac{0'07}{0'06881608655} \right)\left(1 + 0'07\,x\frac{1}{2} \right) = 93487'99 \text{ €.}$$

Solución caso b):

Como se trata de una renta inmediata pospagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **1**, y su representación gráfica es:



$$V_A = \alpha \cdot k \quad {}_{n\ i} \cdot \frac{i}{J_k} = 10000\,x\,2\,x\,\frac{1-\left(1+0'07\right)^{-4}}{0'07}\,x\,\frac{0'07}{0'06881608655} = 68909'70\ €.$$

Para calcular el valor final **V_F** solo tenemos que capitalizar el valor actual **V_A** a ese momento final, es decir:

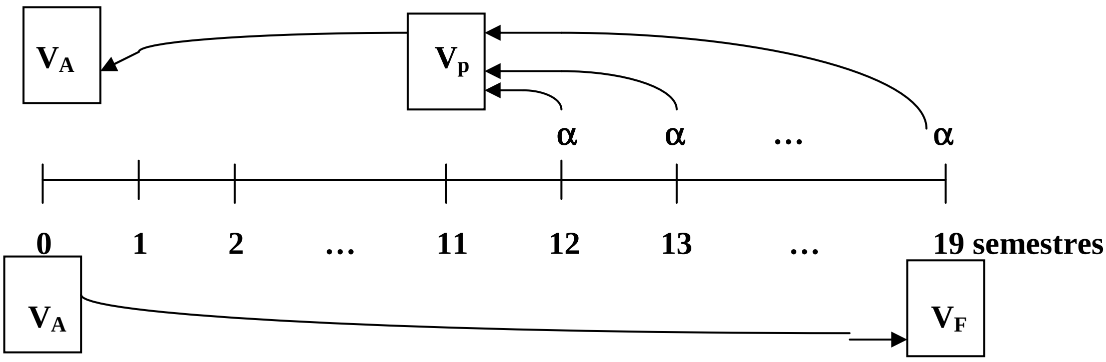
$$V_F = V_A\left(1+i\right)^n = 68909'70\left(1+0'07\right)^4 = 90326'56\ €.$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$V_F = \alpha \cdot k \cdot S_{n\ i} \cdot \frac{i}{J_K} = 10000\,x\,2\,x\,\frac{\left(1+0'07\right)^4-1}{0'07}\,x\,\frac{0'07}{0'06881608655} = 90326'56\ €.$$

Solución caso c):

A ser una renta diferida 6 **años** prepagable, semestralmente el primer vencimiento tiene lugar en el momento 12 semestre y su representación gráfica es:



$$V_A = V_p\left(1+i\right)^{-\left(\frac{d-1}{k}\right)}\left(1+i\cdot\frac{1}{k}\right) = \left(\alpha \cdot k \cdot \quad {}_{n\ i}\ \frac{i}{J_K}\right)\left(1+i\right)^{-\left(\frac{dk-1}{k}\right)} =$$

$$\left(10000x2x\,\frac{1-\left(1+0'07\right)^{-4}}{0'07}\,x\,\frac{0'07}{0'06881608655}\right)\left(1+0'07\right)^{-\left(\frac{6\cdot 2-1}{2}\right)} = 47497'37\ €.$$

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A(1+i)^{\frac{d+n}{k}} = 47497'37(1+0'07)^{10} = 93381{,}09\ €.$$

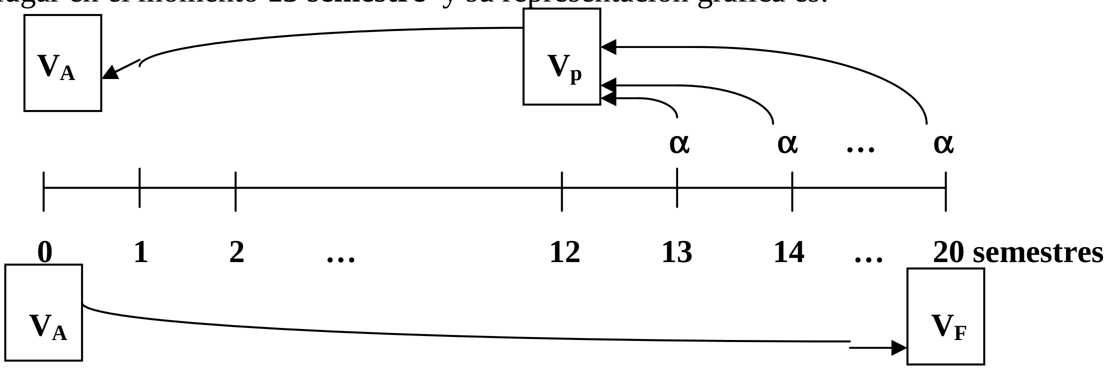
O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$V_F = [\alpha \cdot k \cdot S_{n\ i}]\left(1+i\cdot\frac{1}{k}\right) = \left(\alpha\cdot k\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}\right)\left(1+i\cdot\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \left(10000\,x\,2\,x\,\frac{(1+0'07)^4-1}{0'07}\,x\,\frac{0'07}{0{,}06881608655}\right)\left(1+0'07\,x\,\frac{1}{2}\right) = 93487'99\ €.$$

Solución caso d):

A ser una renta diferida 6 **años** pospagable semestralmente, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **13 semestre** y su representación gráfica es:



$$V_A = V_p(1+i)^{-\frac{d}{k}} = \left(\alpha\cdot k\cdot {}_{n\ i}\frac{i}{J_K}\right)(1+i)^{-\frac{dk}{k}} =$$

$$= \left(10000x2x\,\frac{1\text{ - }(1+0'07)^{-4}}{0'07}\,x\,\frac{0'07}{0'06881608655}\right)(1+0'07)^{-6} = 45917'44\ €.$$

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A(1+i)^{d+n} = 45917'44(1+0'07)^{10} = 90326'55\ €.$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$V_F = \alpha\cdot k\cdot S_{n\ i}\cdot\frac{i}{J_k} = \alpha\cdot k\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} = 10000\,x\,2\,x\,\frac{(1+0'07)^4-1}{0'07}\,x\,\frac{0'07}{0¡06881608655} = 90326'55\ €.$$

Ejemplo 2º:

Con los datos del ejemplo anterior, calcular el valor actual de las distintas rentas considerándolas perpetuas.

Solución:

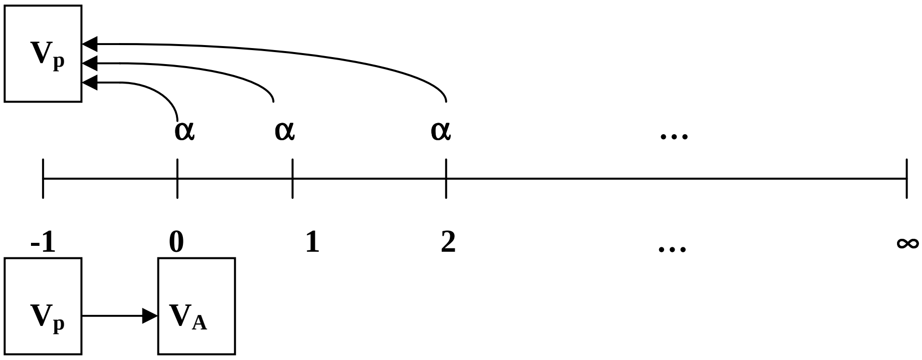
Como se trata de rentas perpetuas, para calcular su valor actual utilizaremos la expresión:

$$V_A = \alpha \cdot k \cdot \frac{1}{J_k}$$

pero teniendo en cuenta que ésta nos refiere todos los capitales a un momento anterior al primer vencimiento y si el primer vencimiento es distinto de **1** tendremos que trasladar el valor obtenido con dicha expresión al momento cero.

Solución caso a):

Como se trata de una renta inmediata prepagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento cero, y su representación gráfica es:

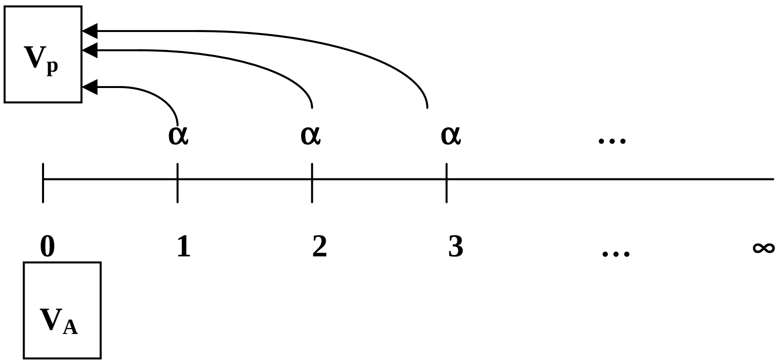


$$J_k = k \cdot \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right] = 2 \cdot \left[(1+0'07)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = 0'06881608655$$

$$V_A = \left(\alpha \cdot k \cdot \frac{1}{J_k} \right) \left(1 + i \cdot \frac{1}{k} \right) = \left(10000 \, x \, 2 \, x \, \frac{1}{0'06881608655} \right) \left(1 + 0'07 \, x \, \frac{1}{2} \right) = 300801'76 \text{ €.}$$

Solución caso b):

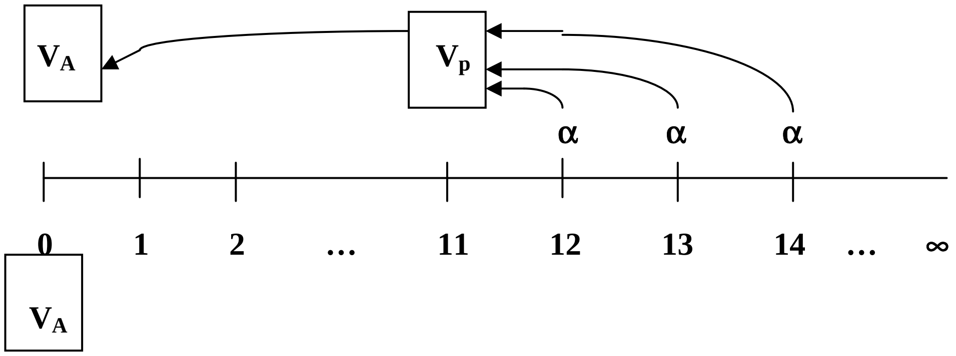
Como se trata de una renta inmediata pospagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **1**, y su representación gráfica es:



$$V_A = \alpha \cdot k \cdot \frac{1}{J_k} = 10000 \, x \, 2 \, x \, \frac{1}{0'06881608655} = 290629'72 \text{ €.}$$

Solución caso c):

A ser una renta perpetua diferida 6 **años** prepagable, semestralmente el primer vencimiento tiene lugar en el momento 12 semestre y su representación gráfica es:

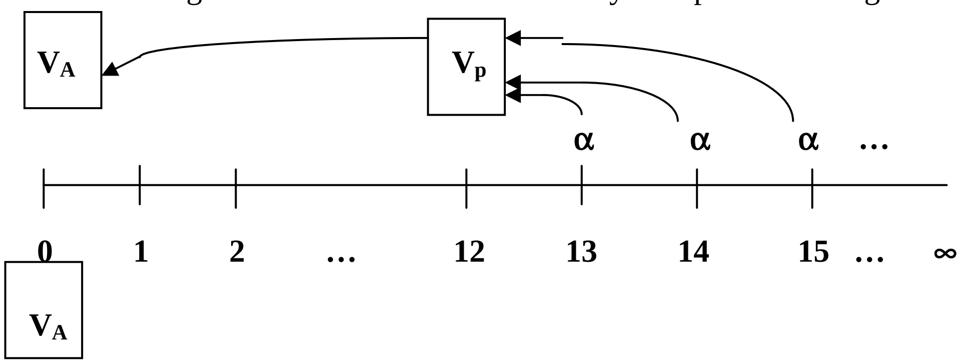


$$V_A = \left(\alpha \cdot k \cdot \frac{1}{J_k}\right)(1+i)^{-\frac{dk-1}{k}}\left(1 + i \cdot \frac{1}{k}\right) =$$

$$\left(10000\,x\,2\,x\,\frac{1}{0'06881608655}\right)(1+0'07)^{-5,5}\left(1+0'07\,x\,\frac{1}{2}\right) = 200322{,}28\ €$$

Solución caso d):

A ser una renta perpetua diferida 6 **años** pospagable semestralmente, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **13 semestre** y su representación gráfica es:



$$V_A = \left(\alpha \cdot k \cdot \frac{1}{J_k}\right)(1+i)^{-\frac{dk}{k}} = \left(10000\,x\,2\,x\,\frac{1}{0'06881608655}\right)(1+i)^{-6} = 193658'85\ €.$$

XXXX