4. RENTAS VARIABLES

I. EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA:

A. Cálculo del valor actual:

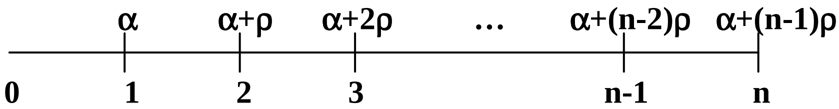
Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ los **n** términos de una renta anual que vencen en los momentos **1, 2, …, n** respectivamente.

Supongamos que las anualidades varían en progresión aritmética, es decir que cada término se obtiene de sumar al anterior una cantidad constante ρ llamada razón.

Resulta entonces:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_1 \\
\alpha_2 &= \alpha_1 + \rho \\
\alpha_3 &= \alpha_1 + 2\rho \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{n-1} &= \alpha_1 + (n-2)\rho \\
\alpha_n &= \alpha_1 + (n-1)\rho
\end{aligned}$$

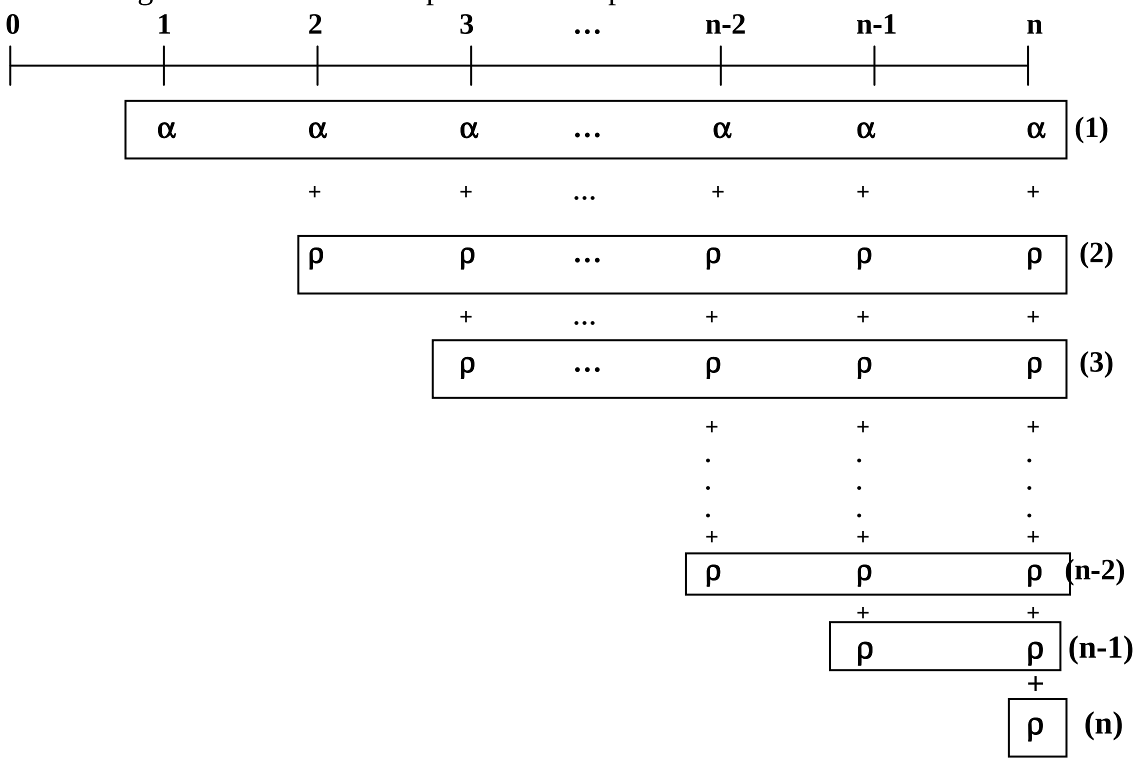
Si hacemos $\alpha_1 = \alpha$, la representación gráfica de la renta es



Para calcular el valor actual de dicha renta tendremos que actualizar cada una de las anualidades por el tiempo que media entre su vencimiento y el momento cero, aplicando a cada capital el factor de actualización $(1+i)^{-n}$ al que denominamos v^n. Es decir:

$$(1+i)^{-n} = v^n \qquad \text{siendo} \qquad v = (1+i)^{-1}$$

Veamos gráficamente cómo se puede descomponer la renta anterior:



A la vista del gráfico se observa que hemos descompuesto la renta propuesta en varias rentas, todas ellas pospagables:

La (1) inmediata y de **n** términos de cuantía **α,** siendo su valor actual:

$$V_A = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i}$$

La (2) diferida un año y de **n-1** términos de cuantía **ρ,** con un valor actual:

$$V_A = \rho \cdot \quad {}_{n\text{-}1\ i} \cdot v$$

La (3) diferida dos años y de **n-2** términos de cuantía **ρ,** con un valor actual:

$$V_A = \rho \cdot \quad {}_{n\text{-}2\ i} \cdot v^2$$

… …

La (n-2) diferida **n-3** años y de 3 términos de cuantía **ρ,** con un valor actual:

$$V_A = \rho \cdot \quad {}_{n\text{-}(n\text{-}3)\ i} \cdot v^3 = \rho \cdot \quad {}_{3\ i} \cdot v^{n-3}$$

La (n-1) diferida **n-2** años y de 2 términos de cuantía **ρ,** con un valor actual:

$$V_A = \rho \cdot \quad {}_{2\ i} \cdot v^{n-2}$$

La (n) diferida **n-1** años y de un término de cuantía **ρ,** con un valor actual:

$$V_A = \rho \cdot \quad {}_{1\ i} \cdot v^{n-1}$$

El valor actual de la renta propuesta resultará de sumar todos los valores actuales de las rentas en las que la hemos descompuesto.

Sabiendo que

$${}_{n\ i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

y que a $(1+i)^{-n}$ le llamaremos $\mathbf{v^n}$**,** resulta:

$${}_{n\ i} = \frac{1 - v^n}{i}$$

y en base a esta expresión vamos a calcular el valor actual de la renta propuesta:

$$V_A = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i} \ + \ \rho \cdot \quad {}_{n\text{-}1\ i} \cdot v \ + \ \rho \cdot \quad {}_{n\text{-}2\ i} \cdot v^2 \ + \ldots + \ \rho \cdot \quad {}_{2\ i} \cdot v^{n-2} \ + \ \rho \cdot \quad {}_{1\ i} \cdot v^{n-1}$$

que podemos expresar:

$$V_A = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i} \ + \ \rho \cdot v \cdot \frac{1 - v^{n-1}}{i} \ + \ \rho \cdot v^2 \cdot \frac{1 - v^{n-2}}{i} \ + \ldots + \rho \cdot v^{n-2} \cdot \frac{1 - v^2}{i} \ + \ \rho \cdot v^{n-1} \cdot \frac{1 - v}{i}$$

Si en esta expresión sacamos factor común a **ρ/i** desde el segundo sumando:

$$V_A = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i} \ + \ \frac{\rho}{i}\left[v\left(1 - v^{n-1}\right) + v^2\left(1 - v^{n-2}\right) + \ldots + v^{n-2}\left(1 - v^2\right) + v^{n-1}(1 - v)\right]$$

Si hacemos los productos del corchete resulta:

$$V_A = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i} \ + \ \frac{\rho}{i}\left(v - v^n + v^2 - v^n + \ldots + v^{n-2} - v^n + v^{n-1} - v^n\right)$$

Sumando y restando $\mathbf{v^n}$ dentro del paréntesis, el resultado no varía, y asociando luego los términos negativos se obtiene:

$$V_A = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left(v + v^2 + \ldots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n - nv^n\right)$$

Dado que:

$$v + v^2 + \ldots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n = \quad {}_{n\ i}$$

y sustituyendo dicho valor dentro del paréntesis resulta:

$$\boxed{\mathbf{V_A = \alpha \cdot {}_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left({}_{n\ i} - n \cdot v^n \right)}}$$

expresión que determina el **valor actual de una renta anual inmediata pospagable de n términos variables en progresión aritmética de razón ρ, valorada al tanto unitario de interés compuesto anual i.**

B. __Cálculo del valor final__:

La determinación del valor final de una renta anual inmediata pospagable de **n** términos variables en progresión aritmética de razón ρ puede hacerse por dos procedimientos.

a) **Capitalizando por n años el valor actual ya obtenido en el punto anterior.**

Así :

$$V_F = V_A(1+i)^n$$

y sustituyendo V_A ***por su valor resulta :***

$$V_F = \left[\alpha \cdot {}_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left({}_{n\ i} - n \cdot v^n \right)\right](1+i)^n$$

Operando ahora :

$$V_F = \alpha \cdot {}_{n\ i}(1+i)^n + \frac{\rho}{i}\left[{}_{n\ i}(1+i)^n - n \cdot v^n (1+i)^n \right]$$

Pero recordemos que :

$${}_{n\ i}(1+i)^n = S_{n\ i}$$

y que $v^n = (1+i)^{-n}$ ***luego*** $v^n(1+i)^n = 1$

de donde :

$$\boxed{\mathbf{V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left(S_{n\ i} - n\right)}}$$

b) **Valorando en el momento n los distintos capitales que componen la renta.**

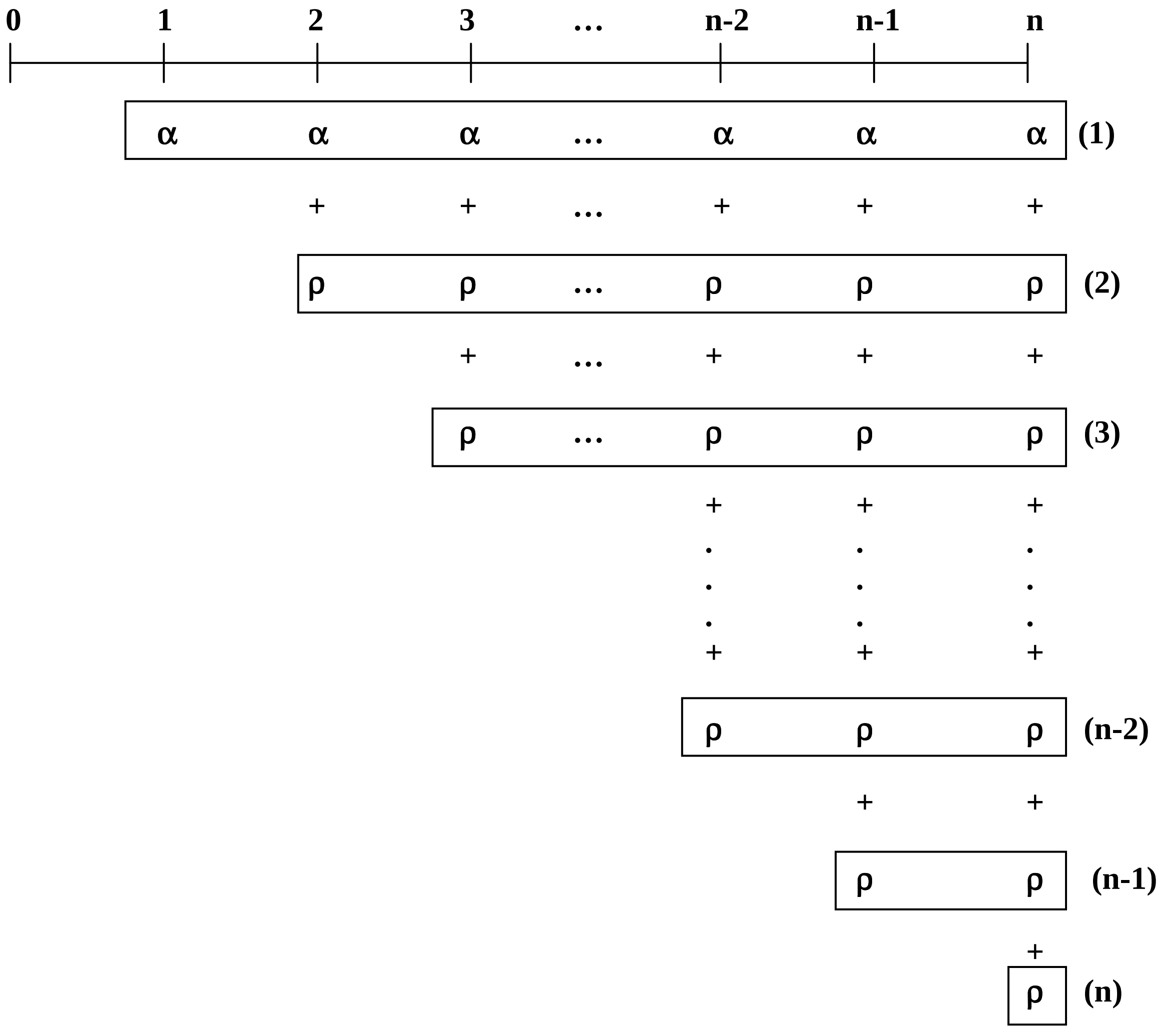
La representación gráfica de la renta, ya vista, es:

	α	α+ρ	α+2ρ	…	α+(n-2)ρ	α+(n-1)ρ
0	**1**	**2**	**3**		**n-1**	**n**

Para calcular el valor fina de dicha renta tendremos que capitalizar cada una de las anualidades por el tiempo que media entre su vencimiento y el momento **n,** aplicando a cada capital el factor de capitalización $\mathbf{(1+i)^n}$ al que denominamos $\mathbf{v^n}$**.** Es decir:

$$\mathbf{(1+i)^n = v^n} \qquad \text{siendo} \qquad \mathbf{v = (1+i)^1}$$

Veamos gráficamente cómo se puede descomponer la renta anterior:



A la vista del gráfico se observa que hemos descompuesto la renta propuesta en varias rentas, todas ellas pospagables:

La (1) inmediata y de **n** términos de cuantía **α,** siendo su valor final:

$$V_F = \alpha \cdot S_{n\ i}$$

La (2) diferida un año y de **n-1** términos de cuantía **ρ,** con un valor final:

$$V_F = \rho \cdot S_{n-1\ i}$$

La (3) diferida dos años y de **n-2** términos de cuantía **ρ,** con un valor actual:

$$V_F = \rho \cdot S_{n-2\ i}$$

… …

La (n-2) diferida **n-3** años y de 3 términos de cuantía **ρ,** con un valor actual:

$$V_F = \rho \cdot S_{3\ i}$$

La (n-1) diferida **n-2** años y de 2 términos de cuantía **ρ,** con un valor actual:

$$V_F = \rho \cdot S_{2\ i}$$

La (n) diferida **n-1** años y de un término de cuantía **ρ,** con un valor actual:

$$V_F = \rho$$

El valor final de la renta propuesta resultará de sumar todos los valores actuales de las rentas en las que la hemos descompuesto.

Sabiendo que

$$S_{n\ i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

y que a $(1+i)^n$ le llamaremos $\mathbf{v^n}$**, resulta:**

$$S_{n\ i} = \frac{v^n - 1}{i}$$

y en base a esta expresión vamos a calcular el valor final de la renta propuesta:

$$V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} + \rho \cdot S_{n-1\ i} + \rho \cdot S_{n-2\ i} + \ldots + \rho \cdot S_{3\ i} + \rho \cdot S_{2\ i} + \rho$$

Si en esta expresión sacamos factor común a ρ desde el segundo sumando:

$$V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} + \rho\left(S_{n-1\ i} + S_{n-2\ i} + \ldots + S_{3\ i} + S_{2\ i} + 1\right)$$

que podemos expresar también:

$$V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} + \rho\left(\cdot \frac{v^{n-1} - 1}{1} + \frac{v^{n-2} - 1}{i} + \ldots + \frac{v^3 - 1}{i} + \frac{v^2 - 1}{i} + 1\right)$$

Si dentro del paréntesis sacamos factor común a **1/i**:

$$V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} + \rho \cdot \frac{1}{i}\left(v^{n-1} - 1 + v^{n-2} - 1 + \ldots + v^3 - 1 + v^2 - 1\right) + 1$$

Asociado luego los términos positivos por un lado y los negativos por otro:

$$V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left(v^{n-1} + v^{n-2} + \ldots + v^3 + v^2 - n\right) + 1$$

Dado que:

$$v^{n-1} + v^{n-2} + \ldots + v^3 + v^2 + 1 = S_{n\ i}$$

y sustituyendo dicho valor dentro del paréntesis resulta:

$$\boxed{V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left(S_{n\ i} - n\right)}$$

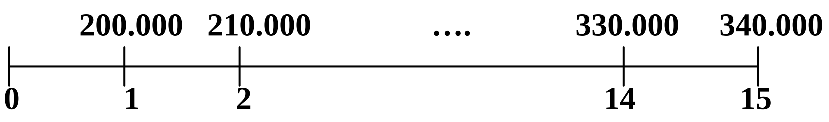
EJEMPLOS:

Ejemplo 1º:

Calcular el valor actual y final de una renta de 15 términos anual pospagable, variable en progresión aritmética a razón de 10.000 € cada año, siendo la primera anualidad de 200.000 € y el tipo de interés anual compuesto el 6%.

Solución:

Gráficamente:



Para calcular el valor actual, partiendo de la expresión:

$$V_A = \alpha \cdot \;\;_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left(\;\;_{n\ i} - nv^n \right)$$

y sustituyendo datos, resulta:

$$V_A = 200000 \times \frac{1-(1+0'06)^{-15}}{0'06} + \frac{10000}{0'06}\left(\frac{1-(1+0'06)^{-15}}{0'06} - 15(1+0'06)^{-15} \right) = 2517995.31 \text{ €.}$$

Para calcular su valor final, basta capitalizar el resultado anteriormente obtenido de $\mathbf{V_A}$ por 15 años al 6% y obtendremos:

$$V_F = V_A(1+i)^n = 2517995'31(1+0'06)^{15} = 6034522'29 \text{ €.}$$

El mismo resultado se habría obtenido utilizando la expresión:

$$V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left(S_{n\ i} - n\right) = \alpha \cdot \frac{(1+i)^n - i}{i} + \frac{\rho}{i}\left(\frac{(1+i)^n - i}{i} - n \right) =$$

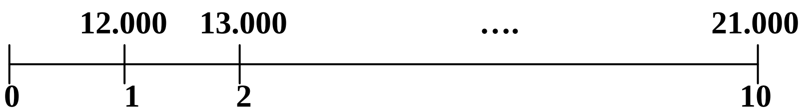
$$= 200000 \times \frac{(1+0'06)^{15} - 1}{0'06} + \frac{10000}{0'06}\left(\frac{(1+0'06)^{15} - 1}{0'06} - 15 \right) = 6034522'29 \text{ €.}$$

Ejemplo 2º:

Una persona que espera obtener unos ingresos al final de cada año de 12.000, 13.000, 14.000 €… desea saber cuál será hoy el valor actual de los ingresos que va a percibir durante 10 años. Calcular dicho valor si el tipo de interés utilizado es el 8% compuesto anual.

Solución:

Gráficamente:



Utilizando la expresión:

$$V_A = \alpha \cdot \;\;_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left(\;\;_{n\ i} - n \cdot v^n \right) = \alpha \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{\rho}{i}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n \cdot (1+i)^{-10} \right) =$$

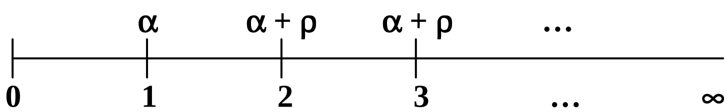
$$12000 \times \frac{1-(1+0'08)^{-10}}{0'08} + \frac{1000}{0'08}\left(\frac{1-(1+0'08)^{-10}}{0'08} - 10 \times (1+0'08)^{-10} \right) = 106497'81 \text{ €}$$

C. Renta anual perpetua variable en progresión aritmética:

Como ya definimos anteriormente, una renta perpetua es aquella que tiene infinitos términos

Sean **α, α + ρ, α + 2ρ, α + 3ρ, …** los términos de una renta con vencimiento al cabo de **1, 2, 3, 4, …** años respectivamente.

Gráficamente:



Para determinar su valor actual partiremos de la expresión conocida:

$$\mathbf{V_A} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \; _{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{i}}\left(\; _{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v^n} \right)$$

que nos determina el valor actual de una renta variable en progresión aritmética.

Calculando el límite de dicha expresión cuando **n** tiende a infinito resulta:

$$\mathbf{V_A} = \alpha \cdot \; _{\infty\ i} + \frac{\rho}{\mathbf{i}}\left(\; _{\infty\ i} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{\infty} \right)$$

El valor de $_{\infty\ \mathrm{i}}$, como hemos visto anteriormente es: $_{\infty\ i} = \dfrac{1}{i}$

Recordemos que $\mathbf{v^n}$ es igual a $(1+i)^{-n}$

El límite de $\mathbf{n\ v^n}$ cuando **n** tiende a infinito es:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot v^n = \lim_{n\to\infty} n \cdot (1+i)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+i)^n} = \frac{\infty}{(1+i)^{\infty}}$$

lo cual parece una determinación **∞/∞ igual a ∞**, pero observése que el denominador es mayor que el numerador, luego el resultado va a ser cero, como puede determinarse aplicando la regla de L'Hôpital, que consiste en calcular la derivada del numerador y la del denominador, y hallar posteriormente el límite del cociente.

Así :

Realizando la derivadas del numerador y denominador resulta :

Derivada del numerador : $\quad$ *la dereivada de* $n = 1$

Derivada del denominador : $\quad$ *la derivada de* $(1+i)^n$ *; como n es una variable* $= (1+i)^n .1.ln(1+i)$

$$\frac{dn}{d(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^n .1.ln(1+i)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+i)^n .ln(1+1)} = \frac{1}{(1+i)^{\infty} .ln(1+i)} = 0$$

Por tanto, la expresión del valor actual toma ahora la forma:

$$V_A = \alpha \frac{1}{i} + \frac{\rho}{i}\left(\frac{1}{i} - 0 \right)$$

es decir :

$$\boxed{V_A = \frac{\alpha}{i} + \frac{\rho}{i^2}}$$

expresión que nos determina el valor actual de una renta perpetua variable en progresión aritmética de razón ρ valorado al tanto unitario de interés compuesto anual ***i.***

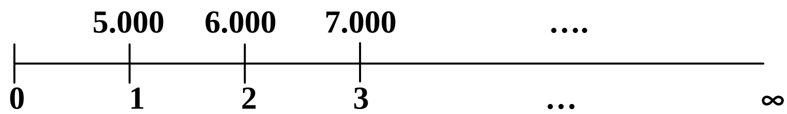
Respecto al valor final, lógicamente, no tiene sentido en las rentas perpetuas, sean estas constantes o variables.

Ejemplo 1º:

Calcular el valor actual de una renta anual perpetua pospagable, variable en progresión aritmética a razón 1.000, siendo el primer término de 5.000 € y el tanto de valoración el 10% de interés anual compuesto.

Solución:

Gráficamente:



$$V_A = \frac{\alpha}{i} + \frac{\rho}{i^2} = \frac{5000}{0'10} + \frac{1000}{(0'10)^2} = 150000\ €.$$

D. Resto de tipos de rentas:

Hemos calculado el valor actual y final de una renta anual inmediata pospagable variable en progresión aritmética, así como el valor actual en caso de que sea perpetua.

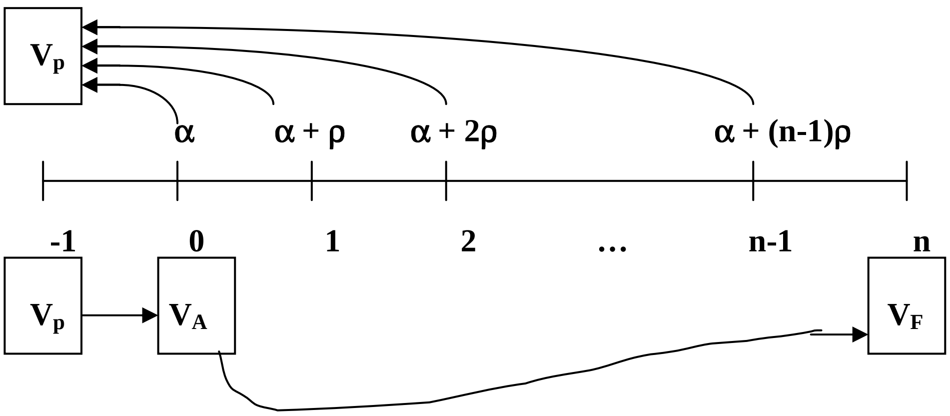
Si el primer vencimiento no tiene lugar en el momento uno sino en cualquier otro, deberemos actuar de la misma forma vista en temas anteriores.

Recordemos la conveniencia de representar gráficamente la renta que se quiera estudiar, porque a la vista del gráfico, la determinación de la expresión a utilizar es inmediata.

Vamos haber a continuación los otros tipos de rentas que nos queda, es decir: la inmediata prepagable, la diferida pospagable y diferida prepagable.

a) Inmediata prepagable*:*

Como se trata de una renta inmediata prepagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento cero, y su representación gráfica es:



Partiendo de la expresión ya conocida cuando la renta es inmediata pospagable variable en progresión aritmética:

$$V_A = \alpha \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{\rho}{i}\left(a_{\overline{n}|i} - n \cdot v^n\right)$$

obtenemos el valor de la renta en el momento anterior al primer vencimiento, es decir en este caso en el momento **–1,** en valor aquí de la renta es V_p .

$$V_p = \alpha \cdot a_{\overline{n}|i} + \frac{\rho}{i}\left(a_{\overline{n}|i} - n \cdot v^n\right)$$

Si después capitalizamos dicho valor $\mathbf{V_p}$ al momento cero, obtenemos el $\mathbf{V_A}$ **.**

$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i})$$

por tanto ahora la formula sería:

$$\boxed{\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i}) = \left[\alpha \cdot \;_{\mathbf{n}\;\mathbf{i}} + \frac{\rho}{\mathbf{i}}\left(\;_{\mathbf{n}\;\mathbf{i}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v^n}\right)\right](1+i)}$$

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$\boxed{V_F = V_A (1+i)^n}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

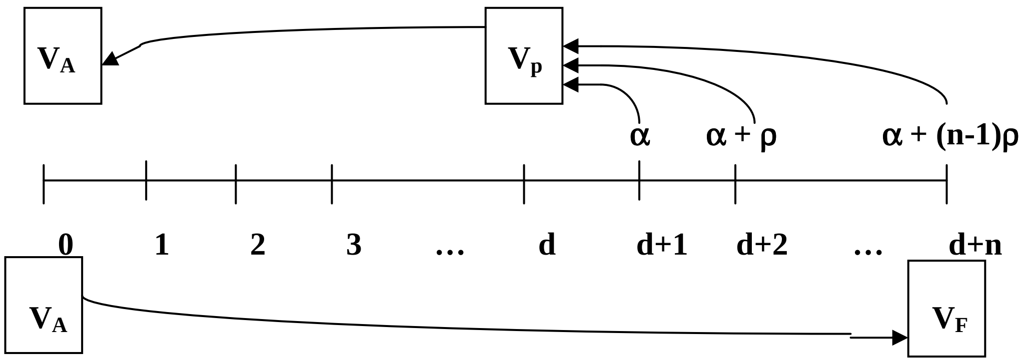
$$\boxed{V_F = \left[\alpha \cdot S_{n\;i} + \frac{\rho}{i}\left(S_{n\;i} - n\right)\right](1+i)}$$

Si la renta fuera perpetua prepagable utilizaríamos la expresión :

$$\boxed{V_A = \left(\frac{\alpha}{i} + \frac{\rho}{i^2}\right)(1+i)}$$

b) **<u>Renta diferida pospagable</u>:**

A ser una renta diferida **d años** pospagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **d+1**, y su representación gráfica es:



Partiendo de la expresión ya conocida cuando la renta es inmediata pospagable variable en progresión aritmética:

$$\mathbf{V_A} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \;_{\mathbf{n}\;\mathbf{i}} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{i}}\left(\;_{\mathbf{n}\;\mathbf{i}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v^n}\right)$$

obtenemos el valor de la renta en el momento anterior al primer vencimiento, es decir en este caso en el momento **d,** en valor aquí de la renta es $\mathbf{V_p}$.

$$\mathbf{V_p} = \alpha \cdot \;_{\mathbf{n}\;\mathbf{i}} + \frac{\rho}{\mathbf{i}}\left(\;_{\mathbf{n}\;\mathbf{i}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v^n}\right)$$

Para calcular el valor en el momento cero, es decir el valor actual **V_A** de la renta, actualizaremos el valor en el momento **d,** es decir **V_p** hasta ese momento cero osea **d años,** y así:

$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i})^{-d}$$

por tanto ahora la formula sería:

$$\boxed{\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i}) = \left[\alpha \cdot \ _{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} + \frac{\rho}{\mathbf{i}} \left(\ _{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v^n} \right) \right] (1+i)^{-d}}$$

Para calcular el valor final **V_F** solo tenemos que capitalizar el valor actual **V_A** a ese momento final, es decir:

$$\boxed{V_F = V_A (1+i)^{d+n}}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

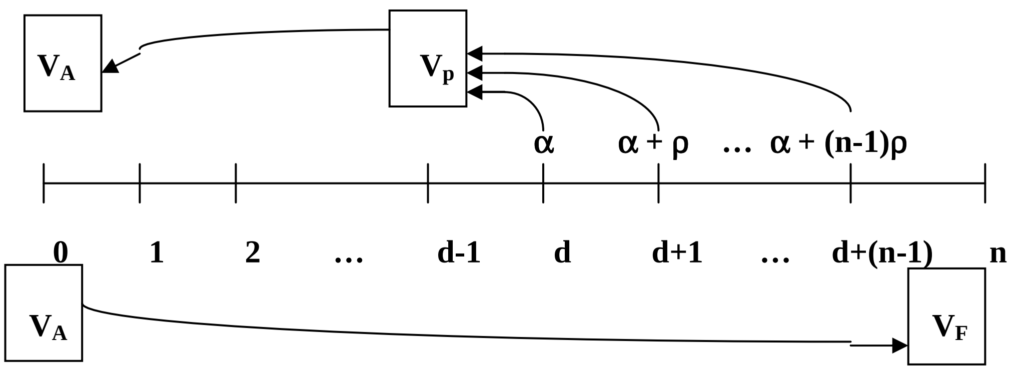
$$\boxed{V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left(S_{n\ i} - n\right)}$$

Si la renta fuera perpetua diferida pospagable utilizaríamos la expresión :

$$\boxed{V_A = \left(\frac{\alpha}{i} + \frac{\rho}{i^2}\right)(1+i)^{-d}}$$

c) **<u>Renta diferida prepagable</u>:**

A ser una renta diferida **d años** prepagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **d**, y su representación gráfica es:



Partiendo de la expresión ya conocida cuando la renta es inmediata pospagable variable en progresión aritmética:

$$\mathbf{V_A} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \ _{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{i}} \left(\ _{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v^n} \right)$$

obtenemos el valor de la renta en el momento anterior al primer vencimiento, es decir en este caso en el momento **d-1,** en valor aquí de la renta es **V_p** .

$$\mathbf{V_p} = \alpha \cdot \ _{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} + \frac{\rho}{\mathbf{i}} \left(\ _{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v^n} \right)$$

Para calcular el valor en el momento cero, es decir el valor actual $\mathbf{V_A}$ de la renta, actualizaremos el valor en el momento **d-1,** es decir $\mathbf{V_p}$ hasta ese momento cero osea **d-1 años,** y así:

$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i})^{-(d-1)}$$

por tanto ahora la formula sería:

$$\boxed{\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i}) = \left[\alpha \cdot {}_{\mathbf{n\ i}} + \frac{\rho}{\mathbf{i}} \left({}_{\mathbf{n\ i}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v^n} \right) \right] (1+i)^{-(d-1)}}$$

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$\boxed{V_F = V_A (1+i)^{d+n}}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$\boxed{V_F = \left[\alpha \cdot S_{n\ i} + \frac{\rho}{i} \left(S_{n\ i} - n \right) \right] (1+i)}$$

Si la renta fuera perpetua diferida prepagable utilizaríamos la expresión :

$$\boxed{V_A = \left(\frac{\alpha}{i} + \frac{\rho}{i^2} \right) (1+i)^{-(d-1)}}$$

EJEMPLOS:

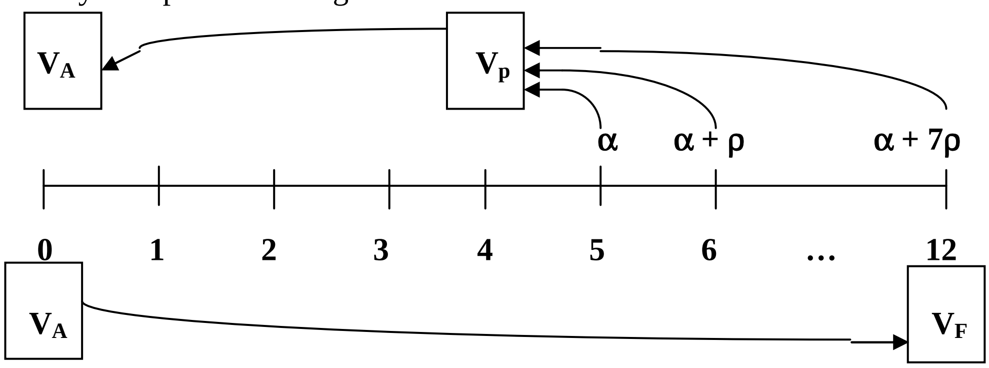
Ejemplo 1º:

Calcular el valor actual y final de una renta de 8 términos, variables en progresión aritmética de razón 3.000 siendo la primera anualidad de 20.000 € y su valoración al 5% de interés compuesto anual, si la renta es:

(a) Diferida 4 años y pospagable.
(b) Diferida 4 años y prepagable.
(c) Inmediata prepagable.
(d) Inmediata pospagable.

Solución caso a):

A ser una renta diferida 4 **años** pospagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **5** y su representación gráfica es:



$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i}) = \left[\ \alpha \cdot \quad {}_{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} + \frac{\rho}{\mathbf{i}}\left(\quad {}_{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{\mathbf{n}} \right) \right] (1+i)^{-d} =$$

$$= \left[20000 \frac{1-(1+0'05)^{-8}}{0'05} + \frac{3000}{0'05}\left(\frac{1-(1+0'05)^{-8}}{0'05} - 8(1+0'05)^{-8} \right) \right] (1+0'05)^{-4} = 158102'13\ €.$$

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

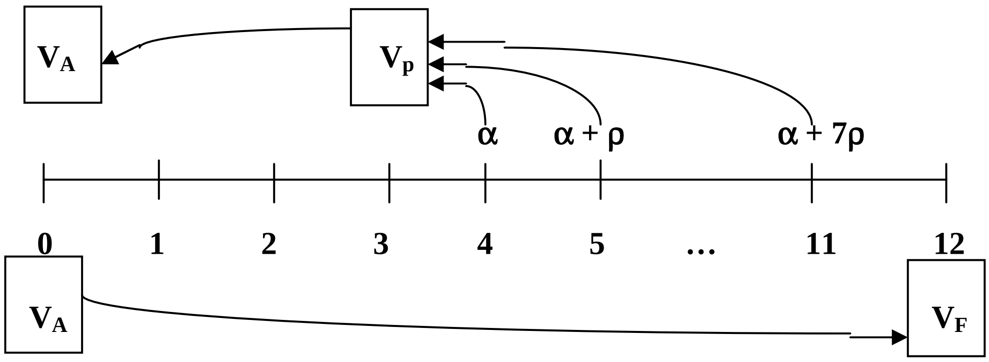
$$V_F = V_A(1+i)^{d+n} = 158102'13(1+0'05)^{12} = 283928'71\ €.$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} + \frac{\rho}{i}(S_{n\ i} - n) = 20000\frac{(1+0'05)^8 - 1}{0'05} + \frac{3000}{0'05}\left(\frac{(1+0'05)^8 - 1}{0'05} - 8 \right) = 283928'71\ €$$

<u>Solución caso b)</u>:

A ser una renta diferida 4 **años** prepagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **4** y su representación gráfica es:



$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i}) = \left[\ \alpha \cdot \quad {}_{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} + \frac{\rho}{\mathbf{i}}\left(\quad {}_{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{\mathbf{n}} \right) \right] (1+i)^{-(d-1)} =$$

$$= \left[20000 \frac{1-(1+0'05)^{-8}}{0'05} + \frac{3000}{0'05}\left(\frac{1-(1+0'05)^{-8}}{0'05} - 8(1+0'05)^{-8} \right) \right] (1+0'05)^{-3} = 166007'24\ €.$$

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A(1+i)^{d+n} = 166007'24(1+0'05)^{12} = 298125{,}15\ €.$$

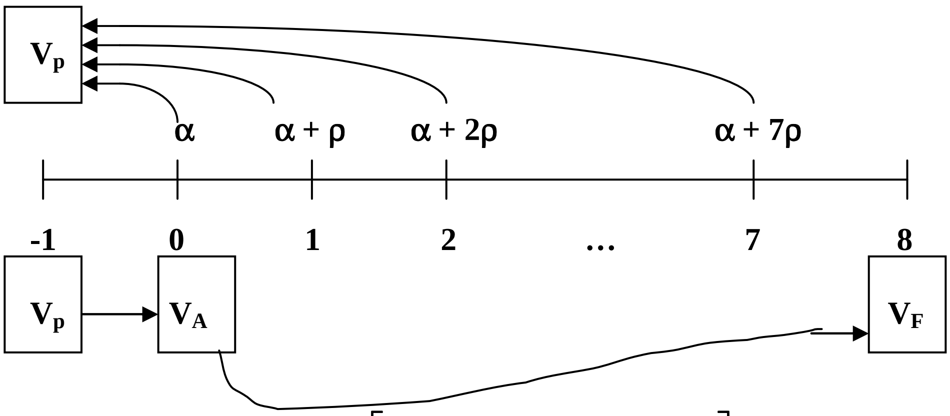
O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$V_F = \left[\alpha \cdot S_{n\ i} + \frac{\rho}{i}(S_{n\ i} - n) \right] (1+i) =$$

$$20000\frac{(1+0'05)^8 - 1}{0'05} + \frac{3000}{0'05}\left(\frac{(1+0'05)^8 - 1}{0'05} - 8 \right)(1+0'05) = 298125'15\ €.$$

Solución caso c):

Como se trata de una renta inmediata prepagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento cero, y su representación gráfica es:



$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i}) = \left[\alpha \cdot \quad {}_{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} + \frac{\rho}{\mathbf{i}}\left(\quad {}_{\mathbf{n}\ \mathbf{i}} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}^{\mathbf{n}}\right)\right](1+i) =$$

$$= \left[20000\frac{1-(1+0'05)^{-8}}{0'05} + \frac{3000}{0'05}\left(\frac{1-(1+0'05)^{-8}}{0'05} - 8(1+0'05)^{-8}\right)\right](1+0'05) = 201782'83\ €.$$

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A(1+i)^n = 201782'83(1+0'05)^8 = 298125'14\ €.$$

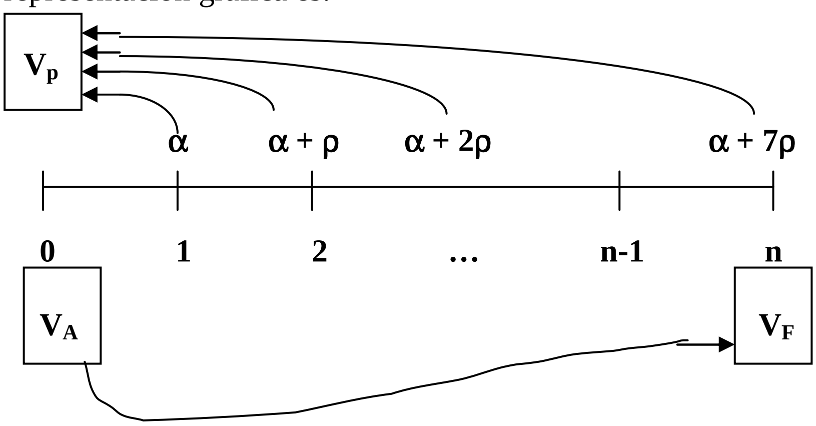
O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$V_F = \left[\alpha \cdot S_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left(S_{n\ i} - n\right)\right](1+i) =$$

$$= 20000\frac{(1+0'05)^8 - 1}{0'05} + \frac{3000}{0'05}\left(\frac{(1+0'05)^8 - 1}{0'05} - 8\right)(1+0'05) = 298125'14\ €.$$

Solución caso d):

Como se trata de una renta inmediata pospagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **1**, y su representación gráfica es:



$$V_A = V_p \cdot (1+i) = \left[\ \alpha \cdot \ {}_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left(\quad {}_{n\ i} - n \cdot v^n\right)\right] =$$

$$= \left[20000\,\frac{1-(1+0'05)^{-8}}{0'05} + \frac{3000}{0'05}\left(\frac{1-(1+0'05)^{-8}}{0'05} - 8(1+0'05)^{-8}\right)\right] = 192174'13\ €.$$

Para calcular el valor final V_F solo tenemos que capitalizar el valor actual V_A a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A(1+i)^n = 192174'13(1+0'05)^8 = 283928'71\ €.$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$V_F = \alpha \cdot S_{n\ i} + \frac{\rho}{i}\left(S_{n\ i} - n\right) = 20000\,\frac{(1+0'05)^8-1}{0'05} + \frac{3000}{0'05}\left(\frac{(1+0'05)^8-1}{0'05} - 8\right) = 283928'71\ €.$$

Ejemplo 2º:

Con los datos del ejemplo anterior, calcular el valor actual de las distintas rentas considerándolas perpetuas.

Solución:

Como se trata de rentas perpetuas, para calcular su valor actual utilizaremos la expresión:

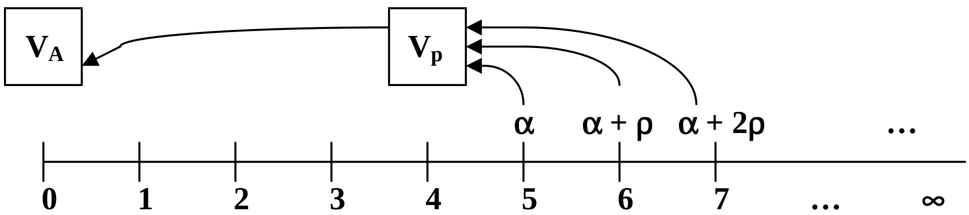
$$V_A = \frac{\alpha}{i} + \frac{\rho}{i^2}$$

pero teniendo en cuenta que ésta nos refiere todos los capitales a un momento anterior al primer vencimiento y si el primer vencimiento es distinto de **1** tendremos que trasladar el valor obtenido con dicha expresión al momento cero.

Solución caso a):

Renta perpetua diferida 4 años y pospagable.

Gráficamente:



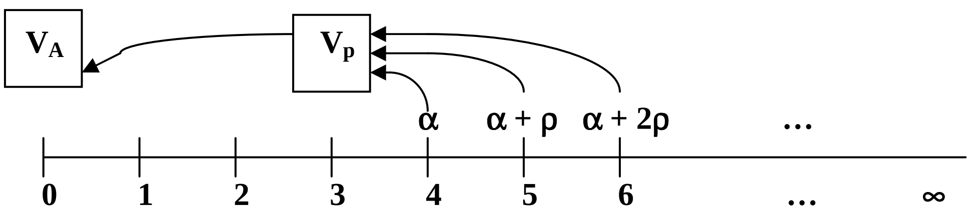
$$V_p = \frac{\alpha}{i} + \frac{\rho}{i^2} = \frac{20000}{0'05} + \frac{3000}{(0'05)^2} = 1600000\ €.$$

$$V_A = V_p(1+i)^{-d} = 1600000(1+0'05)^{-4} = 1316323'95\ €.$$

Solución caso b):

Renta perpetua diferida 4 años y prepagable.

Gráficamente:

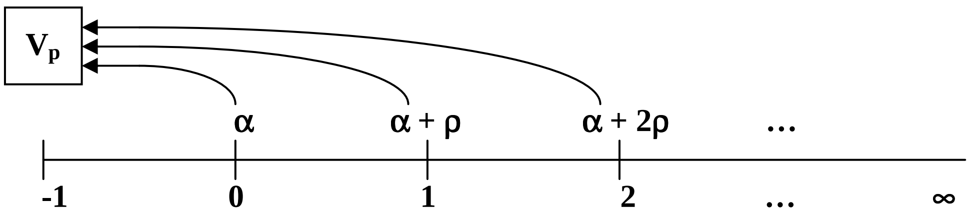


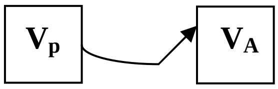
$$V_p = \frac{\alpha}{i} + \frac{\rho}{i^2} = \frac{20000}{0'05} + \frac{3000}{(0'05)^2} = 1600000 \text{ €.}$$

$$V_A = V_p (1+i)^{-(d-1)} = 1600000(1+0'05)^{-3} = 1382140'16 \text{ €.}$$

Solución caso c):

Renta perpetua inmediata prepagable.
Gráficamente:



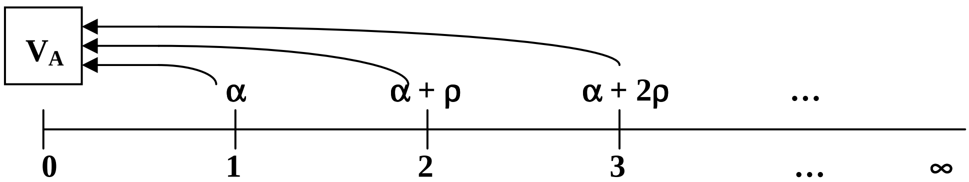


$$V_p = \frac{\alpha}{i} + \frac{\rho}{i^2} = \frac{20000}{0'05} + \frac{3000}{(0'05)^2} = 1600000 \text{ €.}$$

$$V_A = V_p (1+i) = 1600000(1+0'05) = 1680000 \text{ €.}$$

Solución caso d):

Renta perpetua inmediata pospagable.
Gráficamente:



$$V_p = \frac{\alpha}{i} + \frac{\rho}{i^2} = \frac{20000}{0'05} + \frac{3000}{(0'05)^2} = 1600000 \text{ €.}$$

II. EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA:

A. Cálculo del valor actual:

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ los **n** términos de una renta anual que vencen en los momentos **1, 2, …, n** respectivamente.

Supongamos que las anualidades varían en progresión geométrica, es decir que cada término se obtiene de multiplicar al anterior una cantidad constante β llamada razón.

Considerando $\alpha_1 = \alpha$, resulta:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha \\
\alpha_2 &= \alpha\beta \\
\alpha_3 &= \alpha\beta^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{n-1} &= \alpha\beta^{n-2} \\
\alpha_n &= \alpha\beta^{n-1}
\end{aligned}$$

cuya representación gráfica de la renta será:

	α	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	…	$\alpha\beta^{n-2}$	$\alpha\beta^{n-1}$
0	**1**	**2**	**3**		**n-1**	**n**

Para calcular el valor actual de dicha renta tendremos que actualizar cada una de las anualidades por el tiempo que media entre su vencimiento y el momento cero, aplicando a cada capital el factor de actualización $(1+i)^{-n}$ al que denominamos v^n. Es decir:

$$V_A = \alpha \cdot v + \alpha \cdot \beta \cdot v^2 + \alpha \cdot \beta^2 \cdot v^3 + \ldots + \alpha \cdot \beta^{n-2} \cdot v^{n-1} + \alpha \cdot \beta^{n-1} \cdot v^n$$

Sacando factor común a $\alpha.v$ tendremos:

$$V_A = \alpha \cdot v \cdot \left[1 + \beta \cdot v + \beta^2 \cdot v^2 + \ldots + \beta^{n-2} \cdot v^{n-2} + \beta^{n-1} \cdot v^{n-1}\right]$$

El corchete recoge la suma de los términos de una progresión geométrica en la que:

El primer término es:	**1**
El último término es:	$\beta^{n-1}.v^{n-1}$
El número de términos es:	**n**
La razón de la progresión es:	$\beta.v$

Dicha progresión será creciente o decreciente según que el producto $\beta.v$ sea mayor o menor que la unidad.

Como $v = 1/(1+i)$, el producto $\beta.v$ se puede expresar también de la forma $\beta/(1+i)$ en la que su cociente será mayor, igual o menor que uno según que β sea mayor, igual o menor que **(1+i).**

❖ **Supongamos distintos supuestos**:

➢ **β = (1 + i)**

Observemos que si **β = (1+i)** el producto **β.v = 1** luego el valor actual **V_A** de la renta será:

$$V_A = \alpha.v.\,[\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{\text{n veces}}]$$

Es decir:

$$\boxed{V_A = \alpha.v.n}$$

O bien

$$V_A = \frac{\alpha \cdot n}{(1+i)}$$

➢ **β ≠ (1 + i)**

Pero supongamos que **β** es distinto de **(1 + i)** y que además:

✓ Como en el caso más general: **β < (1 + i)**

El corchete recoge entonces la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente, cuya expresión general es:

$$S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$$

Recordemos que:

El primer término es:	**1**
El último término es:	**$\beta^{n-1}.v^{n-1}$**
El número de términos es:	**n**
La razón de la progresión es:	**β.v**

Sustituyendo términos en la expresión resulta:

$$S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r} = \frac{1 - \beta^{n-1} \cdot v^{n-1} \cdot \beta \cdot v}{1 - \beta \cdot v} = \frac{1 - \beta^n \cdot v^n}{1 - \beta \cdot v}$$

por lo que la expresión general del valor actual **V_A** de dicha renta será:

$$\boxed{V_A = \alpha \cdot v \cdot \frac{1 - \beta^n \cdot v^n}{1 - \beta \cdot v}}$$

que puede expresarse de la forma:

$$V_A = \alpha \cdot v \cdot \frac{1 - \beta^n \cdot v^n}{1 - \dfrac{\beta}{1+i}}$$

en la que poniendo denominador común en el denominador resulta:

$$V_A = \alpha \cdot v \cdot \frac{1 - \beta^n \cdot v^n}{\dfrac{1 + i - \beta}{(1+i)}}$$

que puede simplificarse y queda:

$$V_A = \alpha \cdot v \cdot \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{\frac{1+i-\beta}{(1+i)}} = \alpha \cdot \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{\frac{1+i-\beta}{(1+i)}} = \alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta}$$

$$\boxed{V_A = \alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta}}$$

Observemos que si **β = (1+i), a partir de la expresión general se obtiene:**

$$V_A = \alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta} = \alpha \cdot \frac{1-(1+i)^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-(1+i)} = \alpha \cdot \frac{1-(1+i)^0}{1+i-1-i} = \alpha \cdot \frac{1-1}{1-1} = \alpha \cdot \frac{0}{0}$$

que es una indeterminación, pero de la que ya hemos obtenido su valor real anteriormente, recordemos:

$$V_A = \alpha.v.n$$

- ✓ Pero supongamos que **β** es distinto de **(1 + i)** y que además: **β > (1+i)** que recordemos es poco frecuente, que se de este caso.

El corchete recoge entonces la suma de los términos de una progresión geométrica creciente, cuya expresión general es:

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

Recordemos que:

El primer término es:	**1**
El último término es:	$\boldsymbol{\beta^{n-1}.v^{n-1}}$
El número de términos es:	**n**
La razón de la progresión es:	**β.v**

Sustituyendo términos en la expresión resulta:

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{\beta^{n-1} \cdot v^{n-1} \cdot \beta \cdot v - 1}{\beta \cdot v - 1} = \frac{\beta^n \cdot v^n - 1}{\beta \cdot v - 1}$$

por lo que la expresión general del valor actual $\mathbf{V_A}$ de dicha renta será:

$$\boxed{V_A = \alpha \cdot v \cdot \frac{\beta^n \cdot v^n - 1}{\beta \cdot v - 1}}$$

que puede expresarse de la forma:

$$V_A = \alpha \cdot v \cdot \frac{\beta^n \cdot v^n - 1}{\frac{\beta}{1+i} - 1}$$

en la que poniendo denominador común en el denominador resulta:

$$V_A = \alpha \cdot v \cdot \frac{\beta^n \cdot v^n - 1}{\frac{\beta - 1 - i}{(1+i)}}$$

que puede simplificarse y queda:

$$V_A = \alpha \cdot v \cdot \frac{\beta^n \cdot v^n - 1}{\frac{\beta - 1 - i}{(1+i)}} = \alpha \cdot \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{\beta^n \cdot v^n - 1}{\frac{\beta - 1 - i}{(1+i)}} = \alpha \frac{\beta^n \cdot v^n - 1}{\beta - 1 - i}$$

$$\boxed{V_A = \alpha \frac{\beta^n \cdot v^n - 1}{\beta - 1 - i}}$$

B. **<u>Cálculo del valor final</u>:**

Para calcular el valor final **V_F** de la renta propuesta podemos seguir como en otras ocasiones, dos procedimientos:

a) **Capitalizar el valor actual al momento del último vencimiento.**

Así resultará:

$$V_F = V_A \cdot (1+i)^n$$

Y en este caso:

$$\textit{Utizando como valor de } V_A \textit{ la expresión general tenemos :}$$

$$V_F = V_A \cdot (1+i)^n = \alpha \frac{1 - \beta^n \cdot v^n}{1 + i - \beta} (1+i)^n$$

en la que haciendo el producto se obtiene:

$$V_F = \alpha \frac{1 - \beta^n \cdot v^n}{1 + i - \beta} (1+i)^n = \alpha \frac{1 - \beta^n \cdot (1+i)^{-n}}{1 + i - \beta} (1+i)^n = \alpha \frac{(1+i)^n - \beta^n (1+i)^{-n} (1+i)^n}{1 + i - \beta} =$$

$$= \alpha \frac{(1+i)^n - \beta^n}{1 + i - \beta} \qquad (\textit{en este caso } \beta \neq 1 + i)$$

$$\boxed{V_F = \alpha \frac{(1+i)^n - \beta^n}{1 + i - \beta}}$$

En el caso de que **β = (1+i)** la expresión anterior nos daría de nuevo una indeterminación, pero podemos calcular su valor real partiendo de que su valor actual real era **$V_A = \alpha . v . n$** y capitalizando dicho valor, con lo que resultaría

$$V_F = \alpha \cdot v \cdot n \cdot (1+i)^n = \alpha \cdot (1+i)^{-1} \cdot n \cdot (1+i)^n = \alpha \cdot n \cdot (1+i)^{n-1} \qquad (\textit{En el caso de que } \beta = 1 + i)$$

b) **Desplazando cada capital desde su vencimiento hasta el momento en que vence su último término a través del factor de capitalización $(1+i)^n$.**

Recordemos la representación gráfica de la renta:

	α	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	…	$\alpha\beta^{n-2}$	$\alpha\beta^{n-1}$
0	**1**	**2**	**3**		**n-1**	**n**

Para calcular el valor final de dicha renta tendremos que capitalizar cada una de las anualidades por el tiempo que media entre su vencimiento y el momento final, aplicando a cada capital el factor de actualización **(1+i)^n** al que denominamos **v^n.** Es decir:

$$V_F = \alpha \cdot v^{n-i} + \alpha \cdot \beta \cdot v^{n-2} + \alpha \cdot \beta^2 \cdot v^{n-3} + ... + \alpha \cdot \beta^{n-2} \cdot v + \alpha \cdot \beta^{n-1} \cdot v^0$$

Sacando factor común a α tendremos:

$$V_F = \alpha \cdot \left[v^{n-i} + \beta \cdot v^{n-2} + \beta^2 \cdot v^{n-3} + ... + \beta^{n-2} \cdot v + \beta^{n-1} \cdot 1 \right]$$

El corchete recoge la suma de los términos de una progresión geométrica en la que:

El primer término es:	$\mathbf{v^{n-1}}$
El último término es:	$\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{n-1}}$
El número de términos es:	**n**
La razón de la progresión es:	$\boldsymbol{\beta}\mathbf{.v^{-1}}$

Dicha progresión será creciente o decreciente según que el producto $\boldsymbol{\beta}\mathbf{.v^{-1}}$ sea mayor o menor que la unidad.

Como **v = (1+i),** el producto $\boldsymbol{\beta}\mathbf{.v^{-1}}$ se puede expresar también de la forma **β/(1+i)** en la que su cociente será mayor, igual o menor que uno según que **β** sea mayor, igual o menor que **(1+i).**

❖ **<u>Supongamos distintos supuestos</u>:**

➢ **β = (1 + i)**

Observemos que si **β = (1+i)** el producto $\boldsymbol{\beta}\mathbf{.v^{-1} = 1}$ luego el valor actual $\mathbf{V_F}$ de la renta será:

$$V_F = \alpha . [\, v^{n-1} + \underbrace{v^{n-1} + v^{n-1} + \dots + v^{n-1}}_{n\,.\,v^{n-1}} + v^{n-1} \,]$$

Es decir:

$$\boxed{V_F = \alpha \,.\, v^{n-1} \,.n}$$

O bien

$$V_F = \alpha \cdot n \cdot (1+i)^{n-i}$$

➢ **β ≠ (1 + i)**

Pero supongamos que **β** es distinto de **(1 + i)** y que además:

✓ <u>Como en el caso más general</u>: **β < (1 + i)**

El corchete recoge entonces la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente, cuya expresión general es:

$$S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$$

Recordemos que:

El primer término es:	$\mathbf{v^{n-1}}$
El último término es:	$\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{n-1}}$
El número de términos es:	**n**
La razón de la progresión es:	$\boldsymbol{\beta}\mathbf{.v^{-1}}$

Sustituyendo términos en la expresión resulta:

$$S = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r} = \frac{v^{n-1} - \beta^{n-1} \cdot \beta \cdot v^{-1}}{1 - \beta \cdot v^{-1}} = \frac{v^{n-1} - \beta^{n} \cdot v^{-1}}{1 - \beta \cdot v^{-1}}$$

por lo que la expresión general del valor actual **V** de dicha renta será:

$$V_F = \alpha \cdot \frac{v^{n-1} - \beta^{n} \cdot v^{-1}}{1 - \beta \cdot v^{-1}}$$

que puede expresarse de la forma:

$$V_F = \alpha \cdot \frac{v^{n-1} - \frac{\beta^n}{v}}{1 - \frac{\beta}{v}} = \frac{(1+i)^{n-1} \cdot \frac{\beta^n}{(1+i)}}{1 - \frac{\beta}{(1+i)}}$$

en la que poniendo denominador común en el numerador y denominador y operando resulta:

$$V_F = \alpha \cdot \frac{\frac{(1+i)^{n-1} \cdot (1+i) - \beta^n}{(1+i)}}{\frac{(1+i) - \beta}{(1+i)}} = \frac{\left[(1+i)^{n-1} \cdot (1+i) - \beta\right](1+i)}{\left[(1+i) - \beta\right](1+i)} = \frac{(1+i)^{n-1} \cdot (1+i) - \beta^n}{(1+i) - \beta} = \frac{(1+i)^{n} - \beta^n}{(1+i) - \beta}$$

Quedando la siguiente expresión que como vemos es idéntica a la ya obtenida de capitalizar el valor actual:

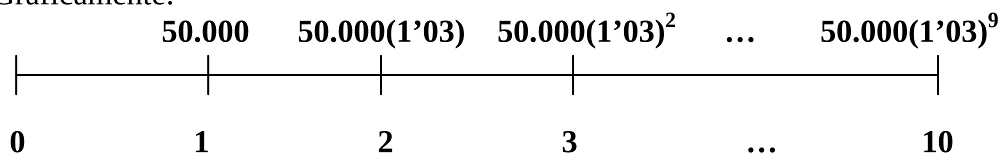
$$\boxed{V_F = \alpha \cdot \frac{(1+i)^n - \beta^n}{(1+i) - \beta}}$$

Ejemplo:

Calcular el valor actual y final de una renta inmediata pospagable variable en progresión geométrica de 10 términos sabiendo que la cuantía del primero es de 50.000 € y que varia a razón del 3% anual acumulativo. Tipo de interés de valoración el 6%

Solución:

Gráficamente:



Calcular el valor actual **V_A**

$$V_A = \alpha \frac{1 - \beta^n \cdot v^n}{1 + i - \beta} = 50000 \frac{1 - (1'03)^{10} \cdot (1 + 0'06)^{-10}}{1 + 0'06 - 1'03} = 415940'19\ €.$$

Calcular el valor final **V_F**, se hará por los dos métodos:

(a) Capitalizando el valor actual:

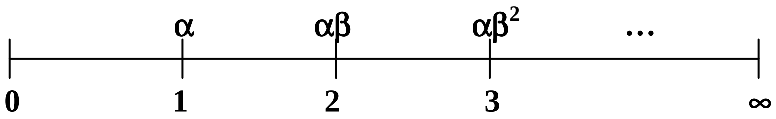
$$V_F = V_A \cdot (1+i)^n = 415940'19(1 + 0'06)^{10} = 744885{,}53\ €.$$

(b) Capitalizando cada uno de los capitales al momento final y sumando los resultados es decir aplicando la expresión:

$$V_F = \alpha \cdot \frac{(1+i)^n - \beta^n}{(1+i) - \beta} = 50000 \frac{(1 + 0'06)^{10} - (1'03)^{10}}{(1 + 0'06) - 1'03} = 744885'53\ €.$$

C. **<u>Renta anual perpetua variable en progresión geométrica</u>:**

Si la renta que estamos tratando tuviera infinitos términos, su representación gráfica sería:



Para determinar su valor actual bastará calcular el límite de la expresión general obtenida anteriormente, cuando **n** tiende a infinito.

$$\lim_{n \to \infty} = \alpha \frac{1 - \beta^n \cdot v^n}{1 + i - \beta}$$

Si sustituímos **n** por **∞** y **v** por **1/(1+i)** resultará:

$$\lim_{n \to \infty} = \alpha \frac{1 - \dfrac{\beta^\infty}{(1+i)^\infty}}{1 + i - \beta}$$

en la que:

$$\frac{\beta^\infty}{(1+i)^\infty} = \left(\frac{\beta}{1+i} \right)^\infty$$

Como hemos considerado que **β** era distinto de **(1+i)** y que como caso general más general **β < (1+i),** el cociente anterior es menor que la unidad y por tanto:

$$\left(\frac{\beta}{1+i} \right)^\infty = 0$$

de donde:

$$\boxed{V_A = \alpha \cdot \frac{1}{1 + i - \beta}}$$

expresión que nos determina el valor actual de una renta perpetua anual inmediata pospagable, variable en progresión geométrica de razón **β,** siendo **β < (1+i).**

Si **β > (1+i),** resultará que **β/(1+i) > 1,** por lo que:

$$\frac{\beta^\infty}{(1+i)^\infty} = \left(\frac{\beta}{1+i} \right)^\infty = 0$$

y por lo tanto

$$V_A = \alpha \cdot \frac{1 - \infty}{1 + i - \beta} = \frac{-\infty}{1 + i - \beta}$$

Como el numerador es negativo y el denominador también, el resultado que se obtiene es:

$$V_A = \infty$$

En el caso de que **β = (1+i),** como la expresión del valor actual es

$$V_A = \alpha \,.\, n \,.\, v$$

Calculando el límite cuando **n → ∞** resulta

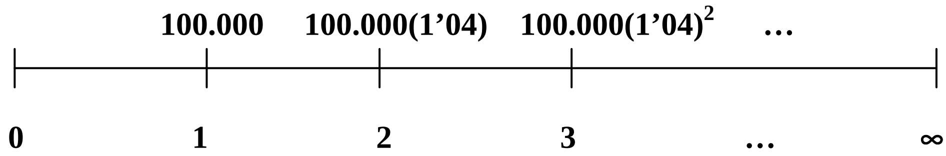
$$V_A = \alpha \infty v = \infty$$

Ejemplo:

Calcular el valor actual de una renta anual perpetua inmediata pospagable, siendo su primer término 100.000 €, la razón 1’04 y el tanto de valoración el 8% de interés compuesto anual.

Solución:

Gráficamente:



Calcular el valor actual **V_A**

$$V_A = \alpha \frac{1}{1+i-\beta} = 100000 \frac{1}{1+0'08-1'04} = 2500000 \text{ €.}$$

D. Resto de tipos de rentas:

Hemos calculado el valor actual y final de una renta anual inmediata pospagable variable en progresión geométrica, así como el valor actual en caso de que sea perpetua.

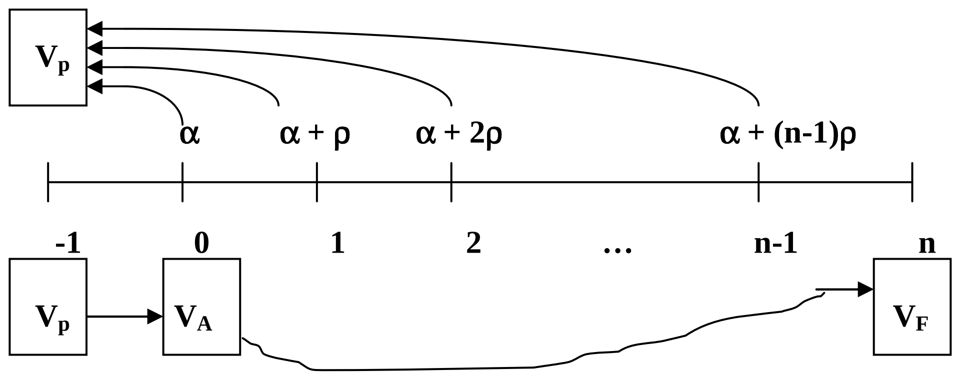
Si el primer vencimiento no tiene lugar en el momento uno sino en cualquier otro, deberemos actuar de la misma forma vista en temas anteriores.

Recordemos la conveniencia de representar gráficamente la renta que se quiera estudiar, porque a la vista del gráfico, la determinación de la expresión a utilizar es inmediata.

Vamos haber a continuación los otros tipos de rentas que nos queda, es decir: la inmediata prepagable, la diferida pospagable y diferida prepagable.

a) Inmediata prepagable*:*

Como se trata de una renta inmediata prepagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento cero, y su representación gráfica es:



Partiendo de la expresión ya conocida cuando la renta es inmediata pospagable variable en progresión geométrica:

$$V_A = \alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta}$$

obtenemos el valor de la renta en el momento anterior al primer vencimiento, es decir en este caso en el momento **–1,** en valor aquí de la renta es **V_p** .

$$V_p = \alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta}$$

Si después capitalizamos dicho valor **V_p** al momento cero, obtenemos el **V_A**.

$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i})$$

por tanto ahora la formula sería:

$$\boxed{V_A = \left(\alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta}\right)(1+i)}$$

Para calcular el valor final **V_F** solo tenemos que capitalizar el valor actual **V_A** a ese momento final, es decir:

$$\boxed{V_F = V_A(1+i)^n}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

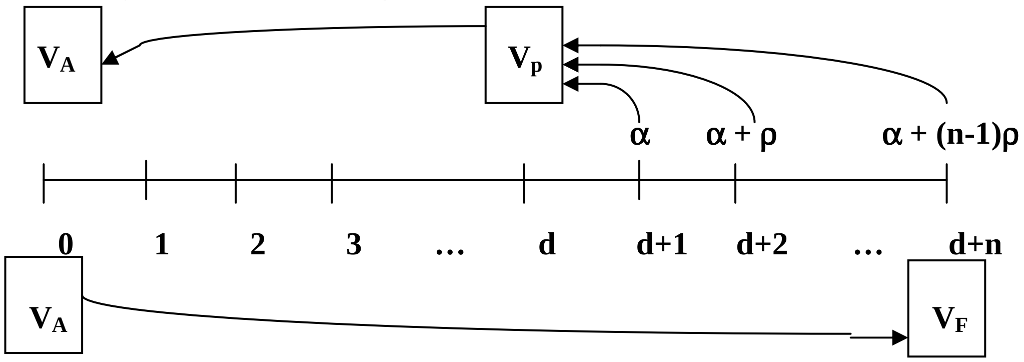
$$\boxed{V_F = \left(\alpha \cdot \frac{(1+i)^n - \beta^n}{(1+i)-\beta}\right)(1+i)}$$

Si la renta fuera perpetua inmediata prepagable utilizaríamos la expresión:

$$\boxed{V_A = \left(\alpha \cdot \frac{1}{1+i-\beta}\right)(1+i)}$$

b) **<u>Renta diferida pospagable</u>:**

A ser una renta diferida **d años** pospagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **d+1**, y su representación gráfica es:



Partiendo de la expresión ya conocida cuando la renta es inmediata pospagable variable en progresión geométrica:

$$V_A = \alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta}$$

obtenemos el valor de la renta en el momento anterior al primer vencimiento, es decir en este caso en el momento **d,** en valor aquí de la renta es **V_p**.

$$V_p = \alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta}$$

Para calcular el valor en el momento cero, es decir el valor actual **V_A** de la renta, actualizaremos el valor en el momento **d,** es decir **V_p** hasta ese momento cero osea **d años,** y así:

$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i})^{-d}$$

por tanto ahora la formula sería:

$$\boxed{\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i})^{-d} = \left[\alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta} \right] (1+i)^{-d}}$$

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$\boxed{V_F = V_A (1+i)^{d+n}}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

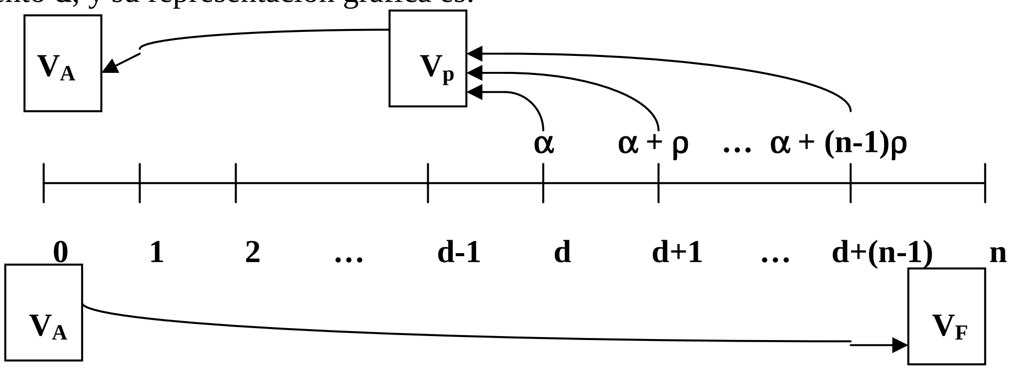
$$\boxed{V_F = \alpha \cdot \frac{(1+i)^n - \beta^n}{(1+i) - \beta}}$$

Si la renta fuera perpetua diferida pospagable utilizaríamos la expresión:

$$\boxed{V_A = \left(\alpha \cdot \frac{1}{1+i-\beta} \right) (1+i)^{--d}}$$

c) **Renta diferida prepagable:**

A ser una renta diferida **d años** prepagable, el primer vencimiento tiene lugar en el momento **d**, y su representación gráfica es:



Partiendo de la expresión ya conocida cuando la renta es inmediata pospagable variable en progresión geométrica:

$$V_A = \alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta}$$

obtenemos el valor de la renta en el momento anterior al primer vencimiento, es decir en este caso en el momento **d-1,** en valor aquí de la renta es $\mathbf{V_p}$.

$$V_p = \alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta}$$

Para calcular el valor en el momento cero, es decir el valor actual $\mathbf{V_A}$ de la renta, actualizaremos el valor en el momento **d-1,** es decir $\mathbf{V_p}$ hasta ese momento cero osea **d-1 años,** y así:

$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i})^{-(d-1)}$$

por tanto ahora la formula sería:

$$\mathbf{V_A} = V_p \cdot (1+\mathrm{i})^{-(d-1)} = \left[\alpha \frac{1-\beta^n \cdot v^n}{1+i-\beta} \right] (1+i)^{-(d-1)}$$

Para calcular el valor final $\mathbf{V_F}$ solo tenemos que capitalizar el valor actual $\mathbf{V_A}$ a ese momento final, es decir:

$$V_F = V_A (1+i)^{d+n}$$

O también podíamos haber capitalizado todos los capitales al momento final, utilizando la expresión conocida:

$$V_F = \left(\alpha \cdot \frac{(1+i)^n - \beta^n}{(1+i) - \beta} \right) (1+i)$$

Si la renta fuera perpetua diferida prepagable utilizaríamos la expresión:

$$V_A = \left(\alpha \cdot \frac{1}{1+i-\beta} \right) (1+i)^{-(d-1)}$$

----------- ooooo ----------

UNIDAD DE TRABAJO 7º

PRÉSTAMOS

1. GENERALIDADES:

A. Introducción:

Un préstamo es una operación en la que una persona -prestamista- entrega a otra -prestatario- un capital C comprometiéndose ésta segunda a devolver el capital recibido y a pagar los intereses correspondientes a la operación, según las condiciones convenidas.

En sentido financiero debe interpretarse que lo que entrega el prestamista debe ser igual a lo que recibe del prestatario, **todo ello valorado en un mismo momento** al tipo de interés fijado para el préstamo.

Existe diversas **formas de amortización de préstamos,** las cuales son las siguientes:

A) **Amortización de préstamos mediante reembolso único:**
- ***a)*** Con pago periódico de intereses.
- ***b)*** Con pago único de intereses junto con el capital que se prestó.

B) **Amortización de préstamos mediante una renta:**
- ***a)*** Sistema francés.
- ***b)*** De cuotas de amortización constantes.
- ***c)*** Sistema alemán.
- ***d)*** Sistema americano.

B. Amortización de préstamos mediante reembolso único:

Sea $\mathbf{C_0}$ el capital prestado, **n** la duración del préstamo e ***i*** el tanto de interés anual compuesto al que se realiza la operación.

Si el préstamo se amortiza mediante reembolso único implica que $\mathbf{C_0}$ se devuelve de una vez en la fecha que se haya convenido.

Se debe cumplir siempre la premisa de que lo que entrega el prestamista debe ser igual a lo que devuelve el prestatario, valorado todo ello en un mismo momento, es decir equivalencia financiera.

Como además de devolver el capital $\mathbf{C_0}$ el prestatario está obligado a pagar los intereses, *según el vencimiento de estos distinguiremos dos casos:*

a) Pago único de intereses junto el capital que se prestó:

Es decir, al final de la duración del préstamo **n años** se paga el capital y los intereses, por tanto el montante a devolver será, utilizando la expresión ya conocida de capitalización compuesta:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1+i)^n}$$

La representación gráfica será

Como lo que entrega el prestamista ha de ser igual a lo que le devuelve el prestatario, **valorado todo ello en un mismo momento,** de be cumplirse:

$$C_0 = \left[C_0 \cdot (1+i)^n\right](1+i)^{-n}$$

$$C_0 = C_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i)^{-n} = C_0 \cdot (1+i)^0 = C_0 \cdot 1 = C_0$$

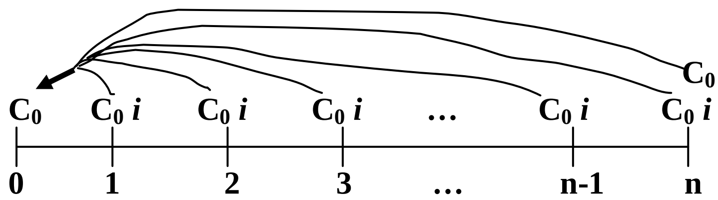
b) **<u>Pago periódico de intereses</u>:**

En este caso, el prestatario pagará al prestamista en los periodos en que se haya dividido la duración del préstamo **n años** los intereses que corresponda y al final de la duración del préstamo devolverá también el capital prestado, es decir a los **n años**.

Como el capital que se debe es siempre el mismo, los intereses de cada año serán iguales y se obtendrán como resultado de multiplicar el tanto unitario de interés anual ***i*** por el valor del capital $\mathbf{C_0}$ objeto del préstamo.

Por tanto: Interés anual = $\mathbf{C_0 \cdot \mathit{i}}$

Su representación gráfica será:



Si el préstamo dura **n** años, cada año se pagan en concepto de intereses $\mathbf{C_0\,\mathit{i}}$ € y en el momento **n,** además del interés correspondiente, se devuelve el capital $\mathbf{C_0}$ que se prestó.

Se debe cumplir la premisa de que entrega el prestamista ha de ser igual a lo que le devuelve el prestatario, **valorado todo ello en un mismo momento,** es decir en el momento cero.

A la vista de la representación gráfica se observa que los intereses pueden actualizarse al momento cero a través del factor $_{n\ i}$ ya que constituyen una renta anual pospagable de **n** términos, cada uno de ellos de cuantía $\mathbf{C_0\,\mathit{i}}$

Para llevar al momento cero el capital $\mathbf{C_0}$ que se devuelve en **n** se utilizará lógicamente el factor $\mathbf{(1+\mathit{i})^{-n}}$.

Para que haya equivalencia financiera debe cumplirse:

$$C_0 = C_0 \cdot i \quad {}_{n\ i} + C_0 \cdot (1+i)^{-n}$$

$$C_0 = C_0 \cdot i \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + C_0 \cdot (1+i)^{-n}$$

Sacando factor común a C y operando :

$$C_0 = C_0 \cdot \left[\frac{i \cdot \left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i} + (1+i)^{-n}\right] = C_0\left[1-(1+i)^{-n} + (1+i)^{-n}\right] = C_0(1-0) = C_0$$

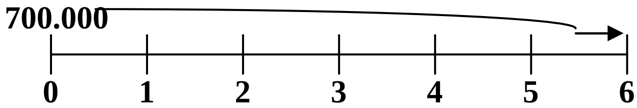
Ejemplo:

Nos conceden un préstamo de 700.000 € al 8% de interés anual. Si la duración del mismo es de 6 años, calcular cuánto tendremos que pagar transcurrido 6 años:

(a) Si se amortiza el préstamo mediante reembolso único de capital e intereses.
(b) Si se amortiza el préstamo mediante reembolso único de capital habiéndose pagado los intereses cada año.

Solución caso a):

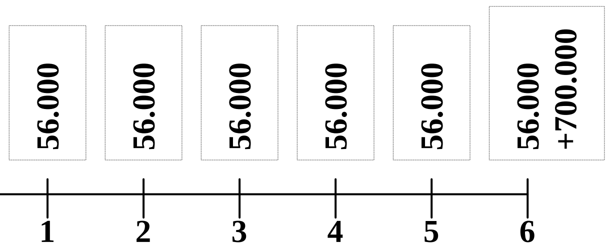
Su representación gráfica será:



$$C_n = C \cdot (1+i)^n \Rightarrow C_6 = 700000\,x\,(1+0'08)^6 = 1110812'03\ €.$$

Solución caso b):

Su representación gráfica será:



Cada año se paga el interés correspondiente: I = C . *i* = 700.000 x 0'08 = 56.000 €
Por tanto, en el momento 6 habrá que pagar el interés anual correspondiente **56.000 €** y devolver el capital que nos prestaron **700.000 €**

C. **Cancelación de un préstamo. Cancelación parcial:**

a) **Préstamo amortizable con reembolso único de capital e intereses:**

Supongamos que se ha concertado un préstamo de cuantía **C** amortizable mediante reembolso único de capital e intereses al cabo de los **n** años que dura dicho préstamo.

La representación gráfica será

¿Qué sucederá si el prestatario propone la cancelación del préstamo en un momento **h** anterior a **n** es decir (h<n)?

1) **Si el tipo de interés del mercado i' es igual o mayor que el tipo de interés del préstamo i,**

$$i' \geq \mathrm{i}$$

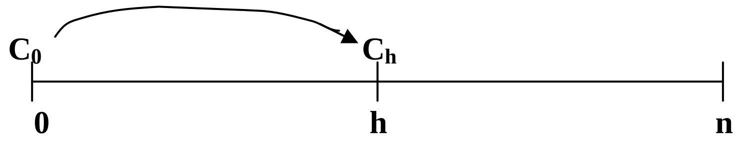
el prestamista no tendrá inconveniente alguno en acertar la cancelación porque puede invertir su dinero en el mercado a un tipo igual o mayor al que obtenía en el préstamo

- ***Si la cancelación es total*** en el momento **h**, exigirá el montante obtenido de capitalizar el capital $\mathbf{C_0}$ que prestó por los **h** años que han transcurrido al tipo de interés **i**.

Por tanto

$$\boxed{C_h = C_0 \cdot (1+i)^h}$$

Gráficamente:



- ***Si la cancelación es parcial*** porque el prestatario realiza en el momento **h** un pago **P_h**, ¿cuánto deberá pagar en el momento **n**?. Llamando **S_h** al saldo que queda pendiente en el momento **h**, y siendo este:

$$S_h = C_0 \cdot (1+i)^h - P_h$$

lo que tendrá que pagar en el momento **n** será el valor del saldo **S_h** capitalizado por (n-h) períodos, al tanto de interés del préstamo. Por tanto:

$$C_n = S_h \cdot (1+i)^{n-h}$$

sustituyendo en la expresión el valor de S_h:

$$C_n = \left[C_0 \cdot (1+i)^h - \mathrm{P_h}\right] \cdot (1+i)^{n-h}$$

si operamos

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^h \cdot (1+i)^{n-h} - \mathrm{P_h} \cdot (1+i)^{n-h} = C_0 \cdot (1+i)^n - \mathrm{P_h} \cdot (1+i)^{n-h}$$

es decir:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1+i)^n - \mathrm{P_h} \cdot (1+i)^{n-h}}$$

Ejemplo:

Se contrata hoy un préstamo de 1.000.000 € al 8% de interés compuesto anual, para ser amortizado mediante reembolso único de capital e interés al cabo de 8 años.

Se pide:

(a) Calcular el importe que deberá pagar el prestatario transcurrido los 8 años.

(b) Suponiendo que el prestatario propusiera la cancelación del préstamo en el momento 5 y siendo el tipo de interés de mercado en ese momento el 9 % anual, ¿cuánto exigirá el prestamista en dicho momento si la cancelación es total?

(c) ¿Cuánto exigirá el prestamista en el momento 8 si el prestatario le ha entregado 600.000 € en el momento 5?

Resolución:

Solución en el caso a)

Según los datos propuestos, la representación gráfica será:

Y la cantidad que deberá devolver el prestatario será:

$$\boldsymbol{C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow C_8 = 1000000(1+0'08)^8 = 1850930'21\ €.}$$

cantidad que comprende la devolución del capital y el pago único de los intereses.

Solución en el caso b)

Si se cancela el préstamo totalmente en el momento 5 y el tipo de interés de mercado es el 9% el prestamista no tendrá inconveniente alguno en que le devuelva

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow C_5 = 1000000(1+0'08)^5 = 1469328'07 \text{ €.}$$

ya que él lo puede reinvertir ahora al 9 % en el mercado.

Solución en el caso c)

Si el prestamista entrega 600.000 € en el momento 5, la cantidad que deberá entregar en el momento 8 será:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n - P_h \cdot (1+i)^{n-h} \Rightarrow C_8 = 1000000(1+0'08)^8 - 600000(1+0'08)^{8-5} = 1095103'01 \text{ €.}$$

Obsérvese que no se ha modificado el tipo de interés de la operación porque el prestamista ha podido reinvertir las 600.000 € de pago anticipado al nuevo tipo de interés de mercado, que es superior al del préstamo, luego aceptará tal anticipaci6n.

2) **Si el tipo de interés de mercado *i'* es menor que el tipo de interés del préstamo *i*,**

i' < i

el prestamista no aceptará la cancelación anticipada a no ser que el prestatario le indemnice por el importe que supone la lesión de sus intereses.

- ***Si la cancelación es total*** en el momento **h**, habrá que pagar una cantidad C_h tal que invertida al tanto de interés de mercado ***i'*** por (n-h) períodos, sea igual que lo que obtendría si no acepta la cancelación. Por tanto

$$C_h \cdot (1+i')^{n-h} = C_0 \cdot (1+i)^n$$

Entonces

$$\boxed{C_h = C_0 \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+i')^{n-h}} = C_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i')^{-(n-h)}}$$

- ***Si la cancelación es parcial*** porque el prestatario entrega una cantidad P_h en el momento **h,** ¿cuánto deberá pagar en el *momento* **n?.**

En el momento **n** pagará una cantidad C_n tal que cubra la diferencia entre lo que cobraría si no hubiera existido cancelación parcial y lo que ha obtenido invirtiendo P_h durante (n - h) periodos al tanto de interés de mercado ***i'***. Por tanto:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot (1+i)^n - P_h \cdot (1+i')^{n-h}}$$

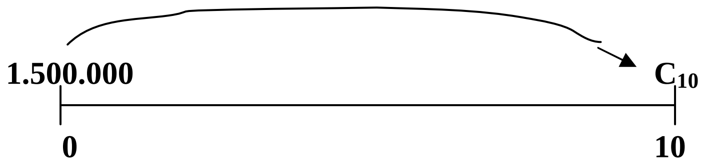
Ejemplo:

Se contrata hoy un préstamo de 1.500.000 € al 8 % de interés compuesto anual, para ser amortizado mediante reembolso único de capital e intereses al cabo de 10 años. Se pide:

(a) Calcular el importe que deberá pagar el prestatario transcurridos los lo años.
(b) Suponiendo que el prestatario propusiera la cancelación de¡ préstamo en el momento 6 y siendo el tipo de interés de mercado en ese momento el 7 % anual, ¿cuánto exigirá el prestamista en el momento 6 si la cancelación es total?
(c) ¿Cuánto exigirá el prestamista en el momento 10 si el prestatario te hubiera entregado 750.000 € en el momento 6?

Solución caso a)

Según los datos propuestos la representación gráfica será:



Por tanto, la cantidad que deberá entregar el prestatario transcurrida la duración del préstamo será

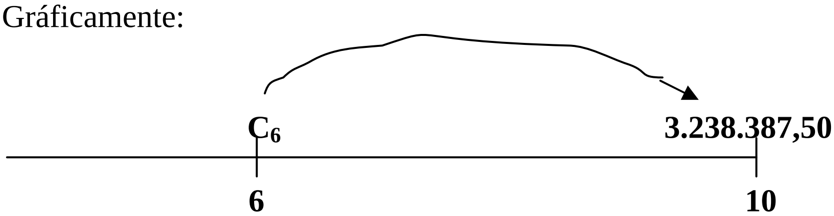
$$C_{10} = C_0(1+i)^n = 1500000(1+0'08)^{10} = 3238387'50 \text{ €.}$$

Dicha cantidad comprende la devolución del, capital y el pago único de intereses

Solución caso b)

Si se cancela el préstamo totalmente en el momento 6 y el tipo de interés de mercado en ese momento es *i'* = 0'07, el prestamista exigirá una cantidad C_6, tal que capitalizada al 7% por el tiempo que media hasta el momento acordado inicialmente para la cancelación de 3.238.387,50 € que es lo que cobraría si no existiera cancelación.

Gráficamente:



Por tanto:

$$C_6 \cdot (1+i')^{n-h} = 3238387{,}50 \text{ €.}$$

Despejando :

$$C_6 = \frac{3238387{,}50}{(1+i')^{n-h}} = 3238387{,}50(1+i')^{-(n-h)} =$$

$$= 3238387{,}50(1+0'07)^{-(10-6)} = 2470550'32 \text{ €.}$$

Solución caso c)

Si el prestatario entrega en el momento 6 la cantidad de 750.000 € el prestamista en el momento lo exigirá: la diferencia entre lo que obtiene si no se cancela el préstamo y lo que puede obtener al invertir las 750.000 € al 7 % (interés de mercado) durante 4 años.

$$\textit{Por tanto :}\quad C_n = C_0 \cdot (1+i)^n - P_h(1+i')^{n-h} \;; \qquad \textit{Como}\;\; C_0 \cdot (1+i)^n = 3238387{,}50 \text{ €.}$$

Sustituyendo y operando :

$$C_{10} = 3238387{,}50 - 750000(1+0'07)^{10-6} = 2255290{,}49 \text{ €.}$$

b) **<u>Préstamo amortizable con reembolso único de capital y pagos periódico de intereses</u>:**

Supongamos que se ha concertado un préstamo de cuantía **C_0** para amortizar mediante reembolso único al cabo de **n** años, pagándose cada año el interés correspondiente **$C_0\, i$.**

Gráficamente:

					C_0 +
C_0	$C_0 i$	$C_0 i$	$C_0 i$	...	$C_0 i$
0	1	2	3	...	n

¿Qué sucederá si el prestatario propone la cancelación del préstamo en un momento **h** anterior a **n,** es decir (h < n)?

1) Si el tipo de interés de mercado ***i'*** es igual o mayor que el tipo de interés del préstamo ***i***,

$$i' \geq i$$

el prestamista no tendrá inconveniente en aceptar la cancelación porque puede invertir su dinero a un tipo superior al que lo tenía invertido.

- <u>Si la cancelación es total</u> y ya se han pagado los intereses correspondientes al momento **h,** el prestamista exigirá que se *le* devuelva el capital **C_0** que prestó
- <u>Si la cancelación es parcial</u> porque el prestatario entrega en el momento **h** una cantidad **P_h ,** el prestamista cuando llegue el momento **n** exigirá que se le paga el saldo que queda pendiente en el momento **h**, que llamamos S_h

$$\boxed{S_h = C_0 - P_h}$$

suponiendo, como ya hemos dicho, que el prestatario le ha pagado los intereses de cada año, -que ahora serán **$S_h\, i$ -** e incluso los del momento **n.**

Gráficamente:

					S_h +
		$S_h\, i$	$S_h\, i$		$S_h\, i$
	h	h+l	h+2	...	n

2) Si el tipo de interés del mercado ***i'*** es menor que el tipo de interés del préstamo ***i.***

$$i' < i$$

- <u>Caso de cancelación total</u>:
  El prestamista en el momento **h** exigirá una cantidad **C_h** tal que sea igual a la suma del valor del préstamo **C_0** más el valor actual al tipo de interés ***i'*** de la lesión anual que sufre en sus intereses, siendo ésta [$C_0\, i - C_0\, i'$]

  Por tanto:

$$\boxed{C_h = (C_0 \cdot i - C_0 \cdot i') \quad {}_{n-h\ \ i} + C_0}$$

- <u>Caso de cancelación parcial</u>:
  Si el prestatario entrega en el momento **h** un pago parcial **P_h** , ¿cuánto exigirá el prestamista en el momento **n**?

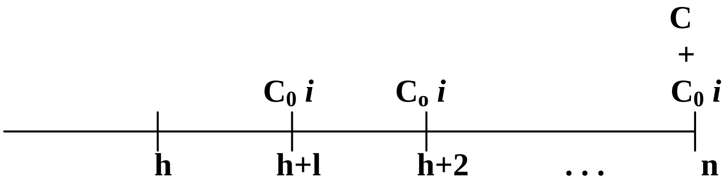
Si no aceptara la cancelación, lo que obtendría en el momento **n** sería:

- El valor final de los intereses anuales que percibe, **C_0 *i*,** valorados al tipo de interés de mercado ***i'***, ya que dichas cantidades sólo puede reinvertirlas a dicho tanto.
- y además el capital **C_0**.

Es decir:

$$C_0 \cdot i \cdot S_{n-h \ \text{i}'} + C_0 \qquad (1)$$

Gráficamente:



Si acepta la cancelación parcial **P_h ,** en el momento **n** tendrá la suma de:

- el valor de **Ph** capitalizado al tanto de mercado i' por (n-h) períodos,
- los intereses anuales -que ahora serán **Sh** valorados en el momento **n** al tanto de mercado i'
- y el saldo **Sh** que queda pendiente por amortizar.

Es decir:

$$P_h \cdot (1+i')^{n-h} + S_h \cdot i \cdot S_{n-h \ \text{i}'} + S_h \qquad (2)$$

Ambas expresiones (1) y (2) deben ser iguales para que el prestamista acepte la cancelación parcial.

Entonces:

$$C_0 \cdot i \cdot S_{n-h \ \text{i}'} + C_0 = P_h \cdot (1+i')^{n-h} + S_h \cdot i \cdot S_{n-h \ \text{i}'} + S_h$$

Como lo que buscamos es **S_h** , despejando quedará:

$$\boxed{\mathrm{S_h} = \frac{C_0 \cdot i \cdot S_{n-h \ \text{i}'} + C_0 - P_h \cdot (1+i')^{n-h}}{i \cdot S_{n-h \ \text{i}'} + 1}}$$

Ejemplo:

Hace 4 años se concertó un préstamo de 5.000.000 € al 10 % de interés anual. para ser amortizado mediante reembolso único, transcurridos 9 años de su constitucí6n, y conviniendo pago anual de intereses

Sabiendo que el tipo de interés de mercado es el 8 % anual, calcular:

(a) La cantidad que hoy cancela totalmente el préstamo.
(b) El saldo del préstamo si hoy entrega el prestatario 2.000.000 €
(c) La cantidad que deberá entregar el prestatario en el momento 9 teniendo en cuenta que ha entregado 2.000.000 € hoy momento 4.

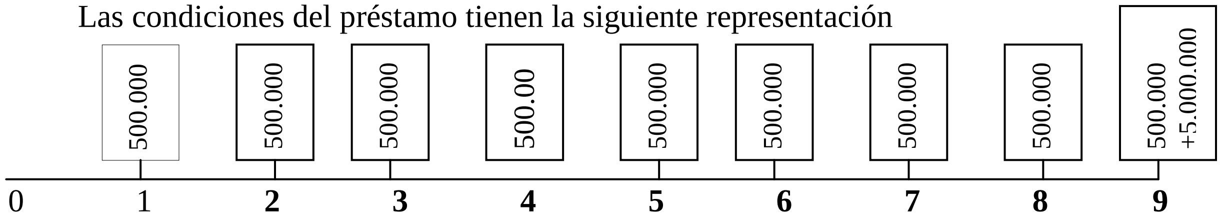
Solución caso a)

El interés que cada año cobrará el prestamista es:

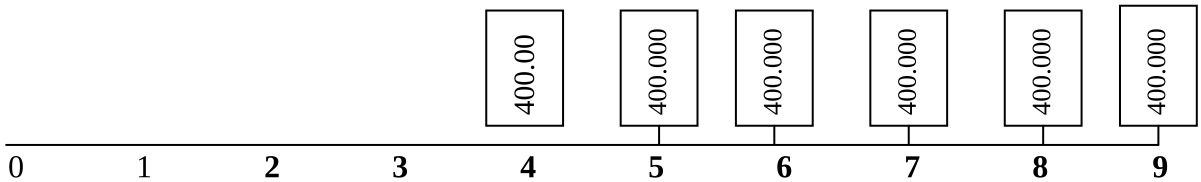
$$\boldsymbol{C_0 \cdot i = 5000000 \times 0'10 = 500000 \text{ €.}}$$

Además, en el momento 9 le devolverán los 5.000.000 € que prestó.

Las condiciones del préstamo tienen la siguiente representación



Si hoy, momento 4, acepta la cancelación total del préstamo y le devuelven los 5.000.000 €, invertidas al 8 % que es el tipo de interés de mercado le producirían 400.000 € anuales.



De donde se deduce que cada año perdería en intereses (500.000 - 400.000) es decir 100.000 €

Por lo tanto, para aceptar la cancelación exigirá una cantidad **C_4** tal que cubra la lesión que sufre en los intereses y el capital que prestó.

$$C_4 = \left(C_0 \cdot i - C_0 \cdot i'\right) \; a_{n-h \; i'} + C_0 = \left(C_0 \cdot \left(i - i'\right)\right) \; a_{n-h \; i'} + C_0 =$$

$$C_4 = \left(5000000\left(0'10 - 0'08\right)\right)\frac{1-\left(1+0'08\right)^{-(9-4)}}{0'08} + 5000000 = 5399271\ €.$$

Hoy, para aceptar la cancelación total, el prestamista exigirá el pago de 5.399.271 €

<u>Solución casos b) y c)</u>

El prestatario hace un pago hoy de 2.000.000 €

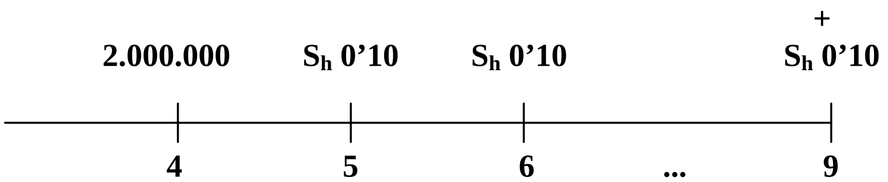
P_4=2.000.000 €

Si el prestamista no aceptara la cancelación, en el momento **n** tendrá:

$$C_9 = C_0 \cdot i \cdot S_{n-h \; i'} + C_0 = 5000000 \times 0'10 \times \frac{\left(1+0'08\right)^{(9-4)}-1}{0'08} + 5000000 = 7933300{,}48\ €.$$

Si el prestamista acepta la cancelación parcial en el momento 9 tendrá:

Gráficamente:



$$S_h = \frac{C_0 \cdot i \cdot S_{n-h \; i'} + C_0 - P_h \cdot \left(1+i'\right)^{n-h}}{i \cdot S_{n-h \; i'} + 1} =$$

$$S_h = \frac{5000000 \times 0'10 \times \dfrac{\left(1+0'08\right)^{9-4}-1}{0'08} + 5000000 - 2000000 \times \left(1+0'08\right)^{9-4}}{0'10 \times \dfrac{\left(1+0'08\right)^{9-4}-1}{0'08} - 1} =$$

$$S_h = 3147898{,}12\ €.$$

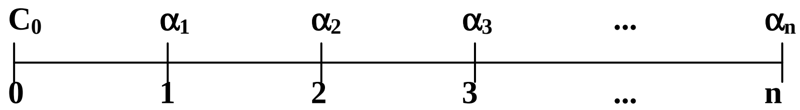
Concluiremos diciendo que el saldo que queda pendiente por amortizar en el momento 4 es de **3.147.898,12** € y será lo mismo que el prestatario debe pagar en el momento 9 puesto que cada año paga los intereses correspondientes a dicho capital, como puede observarse en el gráfico.

2. AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS POR EL SISTEMA FRANCÉS:

A. Amortización de un préstamo mediante renta:

Supongamos un préstamo de cuantía **C_0** que se amortiza mediante **n** pagos de cuantía **$\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , ... , \alpha_n$** que vencen en los momentos, **1, 2, 3, ..., n** respectivamente.

Gráficamente



La equivalencia financiera implica que el valor del préstamo **C_0** ha de ser igual al valor actual de la renta que lo amortice valorada al tipo de interés del préstamo,

Dada la variedad de rentas que hemos estudiado, puede deducirse que un préstamo podrá amortizarse por cualquiera de ellas, pero aquí nos limitaremos fundamentalmente al estudio de la amortización de un préstamo mediante una renta anual constante.

Si en el caso propuesto los pagos son anuales y el tanto de interés es ***i*** anual compuesto, la equivalencia financiera implica que:

$$C_0 = \alpha_1 \cdot (1+i)^{-1} + \alpha_2 \cdot (1+i)^{-2} + \alpha_3 \cdot (1+i)^{-3} + ... + \alpha_n \cdot (1+i)^{-n}$$

que podrá expresarse de forma abreviada como

$$C_0 = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h \cdot (1+i)^{-h}$$

o también, teniendo en cuenta que **$v^n = (1+i)^{-n}$**

$$C_0 = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h \cdot v^h \qquad (1)$$

Si todos los términos que componen la renta son iguales, es decir

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = \alpha$$

sustituyendo en (1) resulta:

$$C_0 = \sum_{h=1}^{n} \alpha \cdot v^h$$

por tanto:

$$C_0 = \alpha \cdot \sum_{h=1}^{n} v^h$$

Como:

$$\sum_{h=1}^{n} v^h = \quad {}_{n\ i}$$

quedará:

$$\boxed{C_0 = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i}}$$

expresión que indica que el préstamo **C_0** es igual al valor actual de la renta anual constante inmediata postpagable de **n** términos que lo amortiza, al tipo de interés anual compuesto ***i.***

B. **<u>Sistema francés o de amortización progresiva</u>:**

El sistema francés de amortización de un préstamo consiste en la amortización de este mediante una renta constante de* n *términos.

Gráficamente

C_0	α_1	α_2	α_3	...	α_n
0	**1**	**2**	**3**	**...**	**n**

Por tanto, si la renta es anual debe cumplirse que:

$$C_0 = \alpha \cdot {}_{n\ i}$$

Cada anualidad es la suma de la cuota de interés y la cuota de amortización correspondiente al año de que se trate.

Este sistema se llama también progresivo porque a medida que transcurre el tiempo las cuotas destinadas a la amortización de capital van siendo mayores. Lógicamente las cuotas de interés irán disminuyendo porque el capital pendiente por amortizar irá siendo menor.

Gráficamente:

C_1	C_2	C_3	. . .	C_{n-1}	C_n
I_1	I_2	I_3	. . .	I_{n-1}	I_n

C. **<u>Cuadro de amortización de un préstamo por el sistema francés</u>:**

Veamos a continuación los elementos que componen el cuadro de amortización de un préstamo según el sistema francés, y cómo puede calcularse cada uno de ellos.

- **Anualidad**

La anualidad que amortiza el préstamo se calcula partiendo de la expresión

$$C_0 = \alpha \cdot {}_{n\ i}$$

Despejando:

$$\boxed{\alpha = C_0 \cdot \frac{1}{{}_{n\ i}}}$$

- **Cuota de interés I_h**

El interés de cada año se obtiene como resultado de aplicar el tanto unitario de interés ***i*** al capital que queda pendiente por amortizar del año anterior, R_{h-1}.

Así, el interés del año **h** será:

$$\boxed{I_h = R_{h-1} \cdot i}$$

Por tanto, el interés del año 1 será:

$$I_1 = R_0 \cdot i$$

como:

$$R_0 = C_0$$

resulta:

$$I_1 = C_0 \cdot i$$

- **Cuota de amortización C_h**

Es la parte de la anualidad que se destina a la amortización de capital.

Como:

$$\alpha = I_h + C_h$$

conociendo $\mathbf{I_h}$ resulta que

$$\boxed{C_h = \alpha - I_h}$$

La cuota de amortización del año **h** es la diferencia entre la anualidad y la cuota de interés $\mathbf{I_h}$ del año **h.**

- **Total amortizado T_h**

Es la suma de las cuotas de amortización pagadas hasta el momento **h.**

Por tanto:

$$\boxed{T_h = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_h}$$

- **Resto por amortizar R_h**

Es la parte de capital que queda pendiente por amortizar. Se llama también **capital vivo.**

Se obtiene como diferencia entre el valor del préstamo $\mathbf{C_0}$ y el total amortizado hasta el momento **h.**

Es decir:

$$R_h = C_0 - T_h$$

También puede obtenerse valorando en **h** todas las anualidades que quedan pendientes.

Entonces

$$\boxed{R_h = \alpha \cdot \quad_{n-h\ \ i}}$$

Ejemplo: Redactar el cuadro de amortización de un préstamo de 1.000.000 € para amortizar mediante 4 anualidades constantes venciendo la primera al finalizar el primer año, y siendo el tipo de interés del préstamo el 8 % anual compuesto.

La representación gráfica será

1.000.000	α	α	α	α
0	1	2	3	4

El valor actual de las cuatro anualidades ha de ser igual a 1.000.000 € Por tanto:

$$1000000 = \alpha \cdot a_{\overline{4}|0'08}$$

De donde: $\alpha = 1000000 \cdot a^{-1}_{\overline{4}|0'08} = \dfrac{C_0}{a_{\overline{4}|0'008}} = \dfrac{1000000}{\dfrac{1-(1+0'08)^{-4}}{0'08}} = 301920{,}80$ €.

La anualidad que amortiza el préstamo es de 301.920,80 €.

El cuadro de amortización en este caso sería el siguiente:

Años n	Anualidad α	Interés In	Cuota de amortización Cn	Total amortizado Tn	Resto por amortizar Rn
0					1000000,00
1	301920,80	80000,00	221920,80	221920,80	778079,20
2	301920,80	62246,34	239674,46	461595,26	538404,74
3	301920,80	43072,38	258848,42	720443,69	279556,31
4	301920,80	22364,51	279556,29	999999,98	0,02

- El interés del año 1 será:

$$I_1 = R_0 \cdot i = C_0 \cdot i = 1000000 \times 0'08 = 80000 \text{ €}$$

- La cuota de amortización del año 1 será:

$$C_1 = \alpha - I_1 = 301920{,}80 - 80000 = 221920{,}80 \text{ €}$$

- El total amortizado en el año 1 será el importe de la única cuota de amortización que se ha pagado:

$$T_1 = C_1 = 221920{,}80 \text{ €.}$$

- El resto por amortizar en el año 1 será:

$$R_1 = C_0 - T_1 = 1000000 - 221921 = 778079{,}20 \text{ €}$$

Ya hemos calculado todos los valores que corresponden al 1º año.

En el 2º año:

- La anualidad es la misma para todos los años: 301.920,80 €
- La cuota de interés será:

$$I_2 = R_1 \cdot i = 778079{,}20 \times 0'08 = 62246{,}34 \text{ €.}$$

- La cuota de amortización:

$$C_2 = \alpha - I_2 = 301920{,}80 - 62246{,}34 = 239674{,}46 \text{ €}$$

- El total amortizado:

$$T_2 = C_1 + C_2 = 221920{,}80 + 239674{,}46 = 461595{,}26 \text{ €.}$$

- El resto por amortizar:

$$R_2 = C_0 - T_2 = 1000000 - 461595{,}26 = 538404{,}74 \text{ €.}$$

$$\text{o también: } \quad R_2 = R_1 - C_2 = 778079{,}20 - 239674{,}46 = 538404{,}74 \text{ €.}$$

Siguiendo el mismo procedimiento utilizado para el cálculo de la 1ª y 2ª filas se realizar para calcular los valores que aparecen en las dos restantes.

Los 2 céntimos que aparecen por defecto de amortización, se deben a los errores por desprecio o redondeo de decimales, y lógicamente en la práctica no tienen ninguna importancia.

D. **<u>Cálculo de la fila h-esima del cuadro de amortización</u>:**

¿Cómo podremos conocer la situación del préstamo en un momento **"h"** sin haber calculado los valores correspondientes a las filas anteriores?

Para ello ser preciso poner todos los elementos que componen dicha fila en función de **C, n, e i**, que son los datos del préstamo.

- **Anualidad del año h**

Como ya hemos calculado anteriormente:

$$\boxed{\alpha_h = C_0 \cdot {}^{-1}_{n\ i} = C_0 \cdot \frac{1}{{}_{n\ i}}}$$

Todas las anualidades son iguales y por tanto:

$$\alpha_h = \alpha$$

- **Cuota de interés del año h**

Ya sabemos que:

$$I_h = R_{h-1} \cdot i$$

Como:

$$R_{h-1} = \alpha \cdot {}_{n-(h-1)\ i} = C_0 \cdot \frac{1}{{}_{n\ i}} \cdot {}_{n-(h-1)\ i}$$

sustituyendo en la expresión de Iª quedará:

$$\boxed{I_h = R_{h-1} \cdot i = \alpha \cdot {}_{n-(h-1)\ i} \cdot i = C_0 \cdot \frac{1}{{}_{n\ i}} \cdot {}_{n-(h-1)\ i} \cdot i}$$

- **Cuota de Amortización del año h**

Vamos a demostrar que las cuotas de amortización varían en progresión geométrica de razón (1 + i).

Como ya hemos visto, todas las anualidades son iguales y por tanto

$$\alpha_h = \alpha_{h+1}$$

y también sabemos que:

$$\alpha_h = C_h + I_h \quad \text{y} \quad \alpha_{h+1} = C_{h+1} + I_{h+1}$$

Por tanto, sustituyendo las anualidades en función del interés y cuota de amortización:

$$\alpha_h = \alpha_{h+1} \Rightarrow C_h + I_h = C_{h+1} + I_{h+1}$$

y también sabemos que:

$$I_h = R_{h-1} \cdot i \quad \text{y} \quad I_{h+1} = R_h \cdot i$$

Por tanto, sustituyendo las cuotas de interés en función del resto por amortizar en el año anterior resultará:

$$C_h + R_{h-1} \cdot i = C_{h+1} + R_h \cdot i$$

que puede expresarse como

$$C_h + R_{h-1} \cdot i - R_h \cdot i = C_{h+1}$$

o también

$$C_h + (R_{h-1} - R_h) \cdot i = C_{h+1}$$

Sabiendo que

$$R_{h-1} - R_h = C_h$$

resulta

$$C_h + C_h \cdot i = C_{h+1}$$

Sacando factor común a C_h

$$\boxed{C_h \cdot (1+i) = C_{h+1}}$$

que nos indica que la cuota del año (h + 1) se obtiene multiplicando la del año h por (1 + i).

Generalizando

$$\boxed{C_h = C_1 \cdot (1+i)^{h-1}}$$

Como la suma de las cuotas de amortización deben ser igual al capital prestado resulta

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n$$

Poniendo todas las cuotas en función de la primera:

$$C_0 = C_1 + C_1 \cdot (1+i) + C_1 \cdot (1+i)^2 + ... + C_1 \cdot (1+i)^{n-1}$$

sacando factor común a C_1

$$C_0 = C_1 \cdot \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-1}\right]$$

Por tanto

$$C_0 = C_1 \cdot S_{n\ i}$$

Despejando C_1

$$C_1 = C_0 \cdot \frac{1}{S_{n\ i}}$$

Si queremos calcular C_h resultará que

$$\boxed{C_h = C_1 \cdot (1+i)^{h-1} = C_0 \cdot \frac{1}{S_{n\ i}} \cdot (1+i)^{h-1}}$$

- **Total amortizado hasta el año h**

Es el resultado de sumar todas las cuotas de amortización pagadas hasta esa fecha. Por tanto

$$T_h = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_h$$

Poniendo todas las cuotas en función de la primera

$$T_h = C_1 + C_1 \cdot (1+i) + C_1 \cdot (1+i)^2 + ... + C_1 \cdot (1+i)^{h-1}$$

Sacando factor común a C_1 queda

$$T_h = C_1 \cdot \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{h-1}\right]$$

Por tanto

$$\boxed{T_h = C_1 \cdot S_{h\ i}}$$

Sustituyendo C_1 en función de C_0 quedará

$$\boxed{T_h = C_0 \cdot \frac{1}{S_{n\ i}} \cdot S_{h\ i}}$$

- **Resto por amortizar en el momento h**

  Es el valor en h de las anualidades pendientes. Por tanto

$$\boxed{R_h = \alpha \cdot \quad {}_{n\text{-}h\ \ i}}$$

  Sustituyendo α en función de C_0

$$\boxed{R_h = C_0 \cdot \frac{1}{\quad {}_{n\ \ i}} \cdot \quad {}_{n\text{-}h\ \ i}}$$

Ejemplo:

Calcular la fila sexta del cuadro de amortización de un préstamo de 1.000.000 € que se amortiza mediante una renta constante anual inmediata pospagable de 10 términos al 7 % de interés compuesto anual.

Solución

- La anualidad del año 6º será

$$\alpha = C_0 \cdot \frac{1}{\quad {}_{n\ \ i}} = C_0 \cdot \frac{1}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = 1000000 \frac{1}{\frac{1-(1+0'07)^{-10}}{0'07}} = 142377'50\ €.$$

- La cuota de interés I_6 se obtiene sustituyendo los datos en la expresión

$$I_h = R_{h-1} \cdot i = \alpha \cdot \quad {}_{n\text{-}(h\text{-}1)\ \ i} \cdot i = 142377,50 \times \frac{1 - (1+0'07)^{-5}}{0'07} \times 0'07 = 40864'31\ €.$$

- La cuota de amortización C_6 se obtendrá de la expresión:

$$C_6 = C_0 \cdot \frac{1}{S_{n\ \ i}} \cdot (1+i)^{h-1} = 1000000 \times \frac{1}{\frac{(1+0'07)^{10}-1}{0'07}} \times (1+0'07)^5 = 101513'19\ €.$$

- El total amortizado T_6 será

$$T_6 = C_0 \cdot \frac{1}{S_{n\ \ i}} \cdot S_{h\ \ i} = 1000000 \times \frac{1}{\frac{(1+0'07)^{10}-1}{0'07}} \times \frac{(1+0'07)^6-1}{0'07} = 517737'32\ €.$$

- El resto por amortizar R_6 se obtiene sustituyendo los datos en la expresión

$$R_6 = C_0 \cdot \frac{1}{\quad {}_{n\ \ i}} \cdot \quad {}_{n\text{-}h\ \ i} = 1000000 \times \frac{1}{\frac{1-(1+0'07)^{-10}}{0'07}} \times \frac{1-(1+0'07)^{-4}}{0'07} = 482262'68\ €.$$

Gráficamente:

h	α_h	I_h	C_h	T_h	R_h
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
6	142.377,50	40.864,31	101.513,19	517.737,32	482.262,68
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

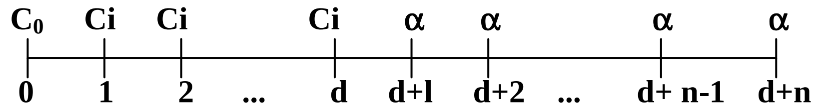
E. **<u>Amortización de un préstamo mediante una renta anual constante diferida d años y pospagable</u>:**

Como puede observarse, todo nuestro estudio básico está referido a la amortización de un préstamo mediante una renta anual, constante, inmediata pospagable.

Si ahora suponemos que el préstamo se amortiza mediante una renta anual constante diferida d años y pospagable pueden suceder dos casos:

a) **Que durante los años de diferimiento se paguen los intereses correspondientes.**

Gráficamente:.



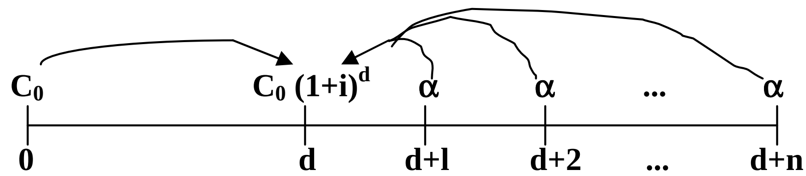
Esto implica que en el momento **d** el capital que tenemos que amortizar sigue siendo $\mathbf{C_0}$. Por tanto el cuadro de amortización se resuelve igual que si no hubiera existido diferimiento ya que la ecuación de equilibrio financiero en el momento **d** seguirá siendo:

$$C_0 = \alpha \quad {}_{n\ i}$$

b) **Que durante los años que dura el diferimiento no se paguen intereses.**

Entonces en el momento **d** el capital que tendremos que amortizar será el valor del préstamo $\mathbf{C_0}$ capitalizado por el tiempo de diferimiento, es decir:

Gráficamente:



Por tanto, en este caso, la ecuación de equilibrio financiero será:

$$\boldsymbol{C_0\left(1+i\right)^d = \alpha \cdot \quad {}_{n\ i}}$$

que puede interpretarse como la amortización de un préstamo de cuantía $\boldsymbol{C_0\left(1+i\right)^d}$ mediante una renta anual constante inmediata pospagable de **n** términos, que es igual a lo visto anteriormente.

Como se observa en el estudio de las rentas, pueden no coincidir los años de su duración con el número de términos que la componen.

De la misma forma, la duración de un préstamo puede no coincidir con el número de términos de la renta que lo amortiza.

En el caso que acabamos de tratar, la duración de] préstamo es **(d + n)** años, mientras que el número de términos que lo amortiza es **n.**

Ejemplo: Redactar el cuadro de amortización de un préstamo de 2.000.000 € que se amortiza mediante una renta anual constante diferida 2 años y pospagable de 4 términos al 8% de interés compuesto anual

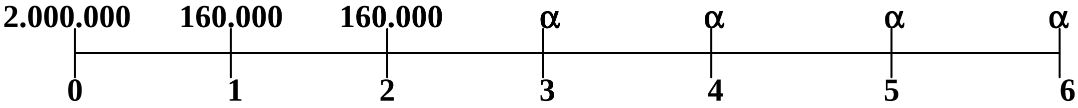
a) a.- Si durante el diferimiento se pagan los intereses correspondientes a cada año.

b) b.- Si no se pagan intereses durante el diferimiento

Solución caso a)

Durante el diferimiento se pagan los intereses correspondientes a cada año.

La representación gráfica será:



Como en el momento 1 y 2 se pagan los intereses correspondientes, el capital pendiente de amortizar en el momento 2 seguirá siendo de 2.000.000 €. Por tanto deberá cumplirse que:

$$2000000 = \alpha \cdot \;_{4\;\;0,08}$$

De donde: $$\alpha = 2000000 \frac{1}{\;_{4\;\;0,08}} = 2000000 \frac{1}{\frac{1-(1+0,08)^{-4}}{0,08}} = 603841,61\ €$$

El interés que se paga durante el primero y segundo año es el mismo

$$I_1 = I_2 = C_0 \cdot i = 2000000 \times 0,08 = 160000\ €$$

Como puede observarse la realización del cuadro de amortización es semejante al obtenido cuando el préstamo se amortiza mediante una renta inmediata pospagable con la única diferencia de que en este caso, en los dos primeros períodos sólo se pagan intereses.

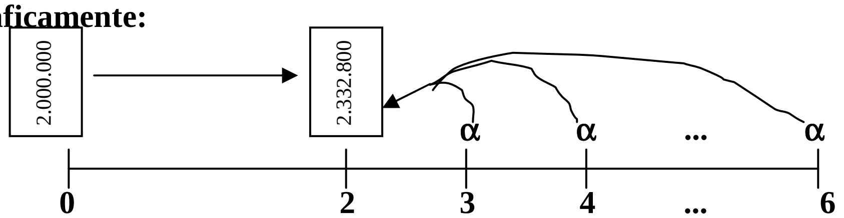
Años n	Anualidad α	Interés In	Cuota de amortización Cn	Total amortizado Tn	Resto por amortizar Rn
0					2.000.000,00
1	160.000,00	160.000,00	0,00	0,00	2.000.000,00
2	160.000,00	160.000,00	0,00	0,00	2.000.000,00
3	603.841,61	160.000,00	443.841,61	443.841,61	1.556.158,39
4	603.841,61	124.492,67	479.348,94	923.190,55	1.076.809,45
5	603.841,61	86.144,76	517.696,85	1.440.887,40	559.112,60
6	603.841,61	44.729,01	559.112,60	2.000.000,00	0,00

Solución caso b)

Durante el diferimiento no se pagan intereses, por lo que estos se irán acumulando al capital **C_0** y en el momento 2 el capital a amortizar será:

$$C_0(1+i)^d = 2000000(1+0,08)^2 = 2332800\ €$$

Gráficamente:



Ahora tenemos que amortizar un capital de 2.332.800 € mediante una renta de 4 términos inmediata postpagable. Por tanto debe cumplirse que:

$$2332800 = \alpha \cdot \;_{4\;\;0,08}$$

De donde

$$\alpha = C_0 \frac{1}{{}_{4\;\;0,08}} = 2332800 \frac{1}{\frac{1-(1+0,08)^{-4}}{0,08}} = 704320,85\ €$$

El cuadro de amortización será el siguiente:

Años n	Anualidad α	Interés In	Cuota de amortización Cn	Total amortizado Tn	Resto por amortizar Rn
0					2.000.000,00
1			0,00	0,00	2.160.000,00
2			0,00	0,00	2.332.800,00
3	704.320,85	186.624,00	517.696,85	517.696,85	1.815.103,15
4	704.320,85	145.208,25	559.112,60	1.076.809,45	1.255.990,55
5	704.320,85	100.479,24	603.841,61	1.680.651,05	652.148,95
6	704.320,85	52.171,92	652.148,93	2.332.799,99	0,01

El defecto de amortización, debido a los errores por desprecio o redondeo de decimales, es en este caso de 0'01 €, que lógicamente carece de importancia.

F. <u>Amortización de un préstamo mediante renta constante fraccionada</u>:

Sea **C_0** la cuantía de un préstamo que se va a amortizar mediante una renta k-simal constante de cuantía **α_k ,** inmediatas pospagable.

Gráficamente:

C_0	α_k	α_k	α_k	...	α_k
0	1	2	3	...	nk

- **Si el tanto de interés del préstamo es el efectivo anual i, calcularemos el tanto k-esimal equivalente i_k a través de la expresión:**

$$i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1$$

y luego podremos escribir la ecuación de equilibrio financiero del préstamo. Así:

$$C_0 = \alpha_k \cdot {}_{nk\;\;i_k}$$

de donde despejando obtendremos:

$$\alpha_k = \frac{C_0}{{}_{nk\;\;i_k}}$$

- **Si el tanto del préstamo es el nominal J_k hallaremos i_k de la forma:**

$$i_k = \frac{J_k}{k}$$

y luego, la ecuación de equilibrio financiero del préstamo, como en el caso anterior será:

$$C_0 = \alpha_k \cdot {}_{nk\;\;i_k}$$

A partir de aquí¡, los pasos a seguir para hallar los elementos del cuadro de amortización son semejantes al caso de amortización mediante renta anual constante.

La diferencia estriba en que en la primera columna figurar "nº de períodos k-esimales" en vez de nº de años. Por otra parte, el interés de cada período será el resultado de multiplicar el resto por amortizar en el período anterior por el tanto **i_k** k-esimal correspondiente.

Ejemplo: Redactar el cuadro de amortización de un préstamo de 600.000 € que se amortiza mediante 4 pagos semestrales constantes, venciendo el primero a los seis meses de la constitución del préstamo, y siendo el tanto nominal acumularle por semestres el 12%.

Resolución:

Gráficamente:

600.000	α_2	α_2	α_2	α_2	
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**semestres**

El valor actual de las 4 semestralidades ha de ser igual a 600.000 € Por tanto:

Como el tanto es nominal calcularemos i_k ***a través de la expresión :*** $i_k = \frac{J_k}{k} = \frac{0,12}{2} = 0,06$

El valor actual de las 4 semestralidades ha de ser igual a 600.000 €. Por tanto :

$$C_0 = \alpha_k \cdot \quad {}_{nk\ \ i_k} \Rightarrow 600000 = \alpha_2 \cdot \quad {}_{4\ \ 0,06} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{600000}{\frac{1 - (1+0,06)^{-4}}{0,06}} = 173154,90\ €$$

La semestralidad que amortiza el préstamo es de 173.154,90 €

El cuadro de amortización en este caso será:

Años n	**Anualidad α**	**Interés In**	**Cuota de amortización Cn**	**Total amortizado Tn**	**Resto por amortizar Rn**
0					600.000,00
1	173.154,90	36.000,00	137.154,90	137.154,90	462.845,10
2	173.154,90	27.770,71	145.384,19	282.539,09	317.460,91
3	173.154,90	19.047,65	154.107,25	436.646,34	163.353,66
4	173.154,90	9.801,22	163.353,68	600.000,02	-0,02

Los 2 céntimos que aparecen por exceso de amortización, se deben a los errores por desprecio o redondeo de decimales, y lógicamente en la práctica no tienen ninguna importancia.

En aquellos casos en los que la renta que amortiza al préstamo sea diferida, procederemos de forma semejante a la expuesta para los mismos casos en que la amortización se hacía mediante pagos anuales.

3. AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS MEDIANTE CUOTAS DE AMORTIZACIÓN CONSTANTES:

A. Generalidades:

La característica principal de este método de amortización es que en cada periodo se amortiza la misma parte de capital, es decir que las cuotas de amortización son todas iguales:

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_{n-1} = C_n$$

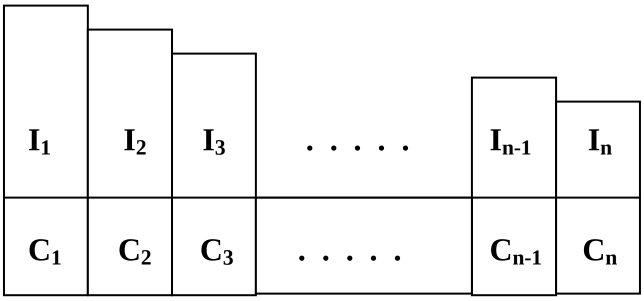
Lógicamente, los intereses van disminuyendo de un período al siguiente, y siempre en la misma proporción, por lo que:

$$I_1 > I_2 > I_3 > \ldots > I_{n-1} > I_n$$

Por lo tanto, la anualidad de cada período es mayor que la del siguiente:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_{n-1} > \alpha_n$$

Gráficamente:



B. Cálculo de los elementos del cuadro de amortización:

Para calcular los elementos del cuadro de amortización procederemos del siguiente modo:

- **Cuota de amortización C_h**

Como todas las cuotas son iguales:

$$C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_h = \ldots = C_n$$

cada una será el resultado de dividir la cuantía del préstamo entre el número de periodos en que se desea amortizar. Es decir:

$$\boxed{C_h = \frac{C_0}{n}}$$

- **Total amortizado T_h**

Es la suma de las cuotas de amortización pagadas hasta el momento h.

$$T_h = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_h$$

Como todas son iguales resulta:

$$\boxed{T_h = h \cdot \frac{C_0}{n}}$$

- **Resto por amortizar R_h**

Es la parte del préstamo que está pendiente de amortizar:

$$R_h = C_0 - T_h$$

Sustituyendo resulta:

$$R_h = C_0 - h \cdot \frac{C_0}{n}$$

De donde:

$$\boxed{R_h = C_0\left(1 - \frac{h}{n}\right)}$$

- **Cuota de interés lh**

El interés de cada año es el resultado de aplicar el tanto **i** al resto por amortizar en el año anterior.

La evolución de los intereses es:

$$I_1 = C_0 \cdot i$$

$$I_2 = \left(C_0 - \frac{C_0}{n}\right) \cdot i = C_0 \cdot i - \frac{C_0}{n} \cdot i$$

$$I_3 = \left(C_0 - 2\frac{C_0}{n}\right) \cdot i = C_0 \cdot i - 2\frac{C_0}{n} \cdot i$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$I_h = \left(C_0 - (h-1)\frac{C_0}{n}\right) \cdot i = C_0 \cdot i - (h-1)\frac{C_0}{n} \cdot i$$

Es decir que los intereses varían en progresión aritmética decreciente de razón:

$$\left(-\frac{C_0}{n} \cdot i\right)$$

Para calcular directamente el interés del año **h** basta multiplicar por **i** el resto por amortizar del período **(h - l).** Es decir:

$$I_h = R_{h-1} \cdot i = C_0\left(1 - \frac{h-1}{n}\right) \cdot i \Rightarrow$$

$$\boxed{I_h = C_0 \cdot i - (h-1)\frac{C_0}{n} \cdot i}$$

Como $\mathbf{C_0.i = I_1}$, la expresión de $\mathbf{I_h}$ puede también tomar la forma de:

$$\boxed{I_h = I_1 - (h-1)\frac{C_0}{n} \cdot i}$$

- **Anualidad**

La anualidad es la suma de la cuota de interés y la de amortización correspondiente a cada período. Así:

$$\alpha_h = I_h + C_h$$

que puede expresarse de la forma:

$$\boxed{\alpha_h = C_0 \cdot i - (h-1)\frac{C_0}{n} \cdot i + \frac{C_0}{n}}$$

Al ser las cuotas de amortización constantes y las de interés variables en progresión aritmética, la anualidad también variará en la misma forma. Es decir:

$$\boxed{\alpha_h = \alpha_1 - (h-1)\frac{C_0}{n} \cdot i}$$

EJEMPLOS:

Ejemplo 1º: Redactar el cuadro de amortización de un préstamo de 3.000.000 € que se desea amortizar mediante 5 cuotas constantes de amortización, al 16% de interés compuesto anual.

Solución

Incógnita: Cuadro de amortización

Años n	Anualidad α	Cuota de Interés	Cuota de Amortización	Total Amortizado	Resto por Amortizar
0					3.000.000,00
1	1.080.000,00	480.000,00	600.000,00	600.000,00	2.400.000,00
2	984.000,00	384.000,00	600.000,00	1.200.000,00	1.800.000,00
3	888.000,00	288.000,00	600.000,00	1.800.000,00	1.200.000,00
4	792.000,00	192.000,00	600.000,00	2.400.000,00	600.000,00
5	696.000,00	96.000,00	600.000,00	3.000.000,00	0,00

La cuota de amortización de cada año es:

$$C_h = \frac{C_0}{n} = \frac{3000000}{5} = 600000\ €$$

La cuota de interés del año primero es:

$$I_1 = C_0 \cdot i = 3000000 \times 0{,}16 = 480000\ €$$

Las demás pueden hallarse a partir de la primera teniendo en cuenta que la razón de la progresión es:

$$-\frac{C_0}{n} \cdot i = -\frac{3000000}{5} \times 0{,}16 = -96000\ €$$

La anualidad de cada año es la suma de la cuota de interés y la de amortización.

$$\alpha_1 = I_1 + C_1 = 480000 + 600000 = 1080000\ €$$

Las demás podemos hallarlas también a partir de la primera teniendo en cuenta que van decreciendo cada año a razón de 96.000 €.

El total amortizado, como ya hemos visto en el estudio teórico, se halla sumando las cuotas de amortización pagadas hasta el momento del cálculo. Por ejemplo:

$$T_3 = h \cdot \frac{C_0}{n} = 3 \times \frac{3000000}{5} = 1800000 \text{ €}$$

El resto por amortizar es la diferencia entre el valor del préstamo y el total amortizado. Por ejemplo:

$$R_3 = C_0 - T_3 = 3000000 - 1800000 = 1200000 \text{ €}$$

O también el resto por amortizar en el periodo anterior menos la cuota de amortización del periodo actual:

$$R_3 = T_3 - C_3 = 1800000 - 600000 = 1200000 \text{ €}$$

Ejemplo 2º: Calcular la fila 7 del cuadro de amortización de un préstamo de 8.000.000 € sabiendo que se amortiza mediante lo cuotas constantes, siendo el tipo de interés el 18 % compuesto anual.

Solución

La cuota de amortización de un año cualquiera es:

$$C_7 = \frac{C_0}{n} = \frac{8000000}{10} = 800000 \text{ €}$$

La cuota de interés del año 7 se obtiene partiendo de la expresión:

$$I_h = C_0 \cdot i - (h-1)\frac{C_0}{n} \cdot i \Rightarrow$$

$$\text{por lo que : } I_7 = 8000000 \times 0{,}18 - (7-1)\frac{8000000}{10} \times 0{,}18 = 576000 \text{ €}$$

La anualidad del año 7 será:

$$\alpha_7 = I_7 + C_7 = 576000 + 800000 = 1376000 \text{ €}$$

El total amortizado en el momento 7 es:

$$T_7 = h \cdot \frac{C_0}{n} = 7 \times \frac{8000000}{10} = 5600000 \text{ €}$$

El resto por amortizar transcurrido el año 7 será:

$$R_7 = C_0 - T_7 = 8000000 - 5600000 = 2400000 \text{ €}$$

------------ ooooo -----------