BLOQUE SEXTO

ÁREAS DE FUNCIONAMIENTO DE LAS EMPRESAS: ÁREA FINANCIERA

UNIDAD DIDÁCTICA DÉCIMA

LA INVERSIÓN EN LA EMPRESA

LA DECISIONES DE INVERSIÓN:

Continuamente la empresa ha modernizarse y crecer, tomando decisiones importantes que afectan a su estructura económica. Cuando se presentan varias alternativas de inversión, ha de ser capaz de evaluarlas para lo que conviene conocer conceptos básicos financieros.

Inversión significa formación de capital. El capital está constituido por todos los bienes utilizados para la producción: terrenos, edificios, maquinaria, instalaciones, marcas, equipos, etc. La empresa aumenta su capital cuando invierte en sus activos tangibles e intangibles, y lo hace con el fin de aumentar o mantener su capacidad económica.

Inversión es toda adquisición de bienes de producción o de bienes de capital financiero, de los que se espera obtener un rendimiento o beneficio.

- **Inversión:** Aplicación de medios financieros en la compra, renovación o mejora de los elementos del inmovilizado, que tienen como objetivo el incremento de la capacidad productiva de la empresa. (Definición propuesta en criterios de corrección PAU.)

Ya vimos el concepto de activo y debemos destacar que cualquier partida de activo es inversión.

> ➔ **Inversión:** en sentido económico, **inversión** significa la utilización de fondos financieros para adquirir bienes de producción con el objeto de aumentar la capacidad productiva de la empresa.

Las inversiones económicas, también se llaman **reales** o **productivas.**

- Inversiones económicas y financieras:

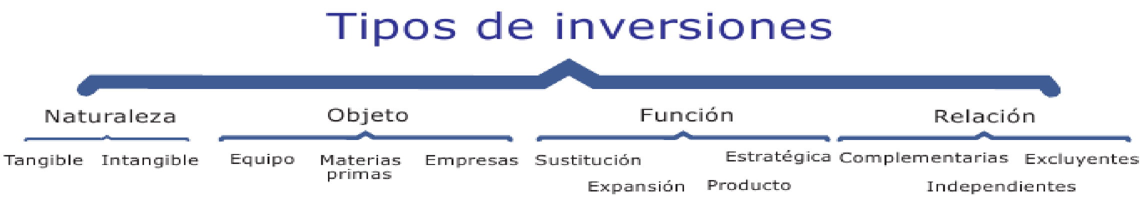
Aunque están muy relacionadas, conviene distinguir entre inversiones económicas y financieras. Cuando una persona decide ahorra una parte de sus ingresos y con el dinero ahorrado compra titulos-valores (acciones, obligaciones, etc.), con el objetivo de obtener una renta en el futuro, está realizando una inversión financiera. Por el contrario, si ese dinero ahorrado lo utiliza para adquirir, una casa, un automóvil, etc., esta realizando una inversión económica.

En el caso de una empresa, si de sus beneficios adquiere, por ejemplo acciones de una empresa, esta realizando una inversión financiera. Si lo utiliza para adquirir maquinaria, edificios, elementos de transporte, etc., esta realizando una inversión económica o productiva.

■ **<u>Tipos de inversión</u>:** Se puede realizar según varios criterios:

- **Naturaleza:**
  - ✔ Tangible.
  - ✔ Intangible.
- **Objeto:**
  - ✔ Equipo industrial.
  - ✔ Materias primas.
  - ✔ Equipo de transporte.
  - ✔ Empresas completas o participación accionarial.
- **Función:**
  - ✔ Sustitución o reemplazo (renovar y actualizar los equipos).
  - ✔ Expansión (crecer o acceder a nuevos mercados).
  - ✔ Producto (mejorar los productos o ampliar la gama).
  - ✔ Estratégicas (reducir riesgos causados por los avances tecnológicos, la competencia, los cambios sociales,etc.).
- **Relación:**
  - ✔ Complementarias.
  - ✔ Independientes.
  - ✔ Excluyentes.
- **Según su carácter temporal:**
  - ✔ De funcionamiento.
  - ✔ Permanentes o estructurales.

➢ **<u>La inversión está condicionada por</u>:**
- Rentabilidad esperada
- Riesgo aceptado
- Horizonte temporal



■ **<u>Inversiones económicas a corto y largo plazo</u>:**

Según el carácter temporal de la inversión, se distingue entre:
- **Inversiones permanentes o estructurales:** aquellas inversiones destinadas a las adquisiciones que la empresa en principio desea utilizar durante largos períodos de tiempo, siempre superiores a un año (edificios, maquinaria, elementos de transporte, etc.). **Inversiones a largo (activo no corriente).**
- **Inversiones de funcionamiento:** son las realizadas por la empresa con el fin de adquirir elementos necesarios para el proceso productivo (materias primas, componentes, mercaderías, combustible, etc.). Estas inversiones se renuevan periódicamente y se recuperan a corto plazo. Son inversiones de carácter temporal cuya permanencia en la empresa se estima inferior al año. **Inversiones a corto plazo (activo corriente)**

- **Clases de inversiones permanentes**:
  - **Inversiones de renovación o de remplazo:** inversiones de renovación o de remplazo que pretenden sustituir equipos de producción desgastados o estropeados por otros nuevos
  - **Inversiones de expansión o ampliación:** inversiones de ampliación o expansión que persiguen la expansión y modernización de la empresa. Incrementar la capacidad productiva de la empresa.
  - **Inversiones de modernización o innovación:** inversiones que pretenden sustituir equipos que funcionan por otros que añaden mejoras tecnológicas y con los que se pretender reducir costes o aumentar la calidad del producto. En este caso se dice que los equipos sustituidos se han quedado obsoletos.
  - **Inversiones en I+D+i:** se pretende con ello la búsqueda de nuevos productos o de técnicas productivas más eficientes.
  - Inversiones de carácter social o medioambiental: se pretende mejorar las condiciones de trabajo de los empleados o en función de la responsabilidad social de la empresa hacía el medio ambiente o con la comunidad local en la que está situada.

- **El proceso temporal de un proyecto de inversión**:

En todo proyecto de inversión hay que tener en cuenta el **desembolso inicial (A)** necesario para ejecutar la inversión, los **flujos de caja (Q)** (diferencia entre cobros y pagos) que generará dicha inversión y los momentos (periodos de tiempo) en que se obtendrán o **duración de la inversión (n).**

Llegado a este punto debemos diferenciar correctamente los conceptos de beneficio y flujos netos de caja.

Beneficio = Ingresos – Costes y Flujo de Caja = Cobros – Pagos (Cash flow financiero)

Ejemplo: Supongamos un empresario que dispone de 450.000 € y se plantea ampliar la flota de camiones de su empresa. Espera obtener unos ingresos de 250.000 €, y esperar tener unos gastos de combustible, repuestos, reparaciones y conservación de 200.000 €, por lo que el **beneficio** generado será de 50.000 € (Bº = I – CT = 250.000 – 200.000 = 50.000 €), pero dado que sus clientes no le pagan al contado, sus ingresos contables (factura, anual), no coincide con los **cobros** de ese mismo año, ya que esta concediendo crédito a sus clientes, igual ocurre con sus pagos, tampoco se ahcen de forma inmediata, por lo que los gastos contable del ejercicio económico, no coincide con los pagos anuales.

Si se da la coincidencia de que todos los ingresos del período son cobrados y todos los gastos son pagados, teóricamente coincidirán en cuantía los Beneficios y el Flujo de Caja. Decimos teóricamente porque existen una serie de gastos contables que no acarrean pago, ejemplo las dotaciones por amortizaciones y provisiones para insolvencias. No suele ser habitual en la práctica mercantil pagos y cobros en efectivo sino aplazados, es decir, crédito.

Las decisiones referidas a la política de inversiones se denominan presupuesto de capital, y están muy condicionadas por criterios financieros.

CORRIENTE FINANCIERA DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN

-A	Q1	Q2	Qi	Qn-1	Qn
0	1	2	i	n-1	n

➔ **Toda inversión queda definido por tres magnitudes:**

A = Desembolso inicial de la inversión (aaprece con signo negativo por representar un pago).
Q_i = Cuasirrenta o flujo de caja (C_i – P_i osea: Cobros – Pagos).
n = Variable tiempo, es decir, el horizonte temporal.
i = Subperíodo en que esta dividido el horizonte temporal.

LA EQUIVALENCIA DE CAPITALES EN EL TIEMPO:

➢ **Interés:**

La idea de interés va unida en la vida comercial a la idea de préstamo.

Un préstamo es un acuerdo por el cual una persona, llamada prestamista, deja una cosa a otra, llamada prestatario, con la condición de que éste se la devuelva.

Cuando lo que presta es dinero, normalmente el prestamista, por ese préstamo, exigirá una recompensa, y esa recompensa es el interés.

Podemos decir que el interés es:

- Es la cantidad que percibe el prestamista como remuneración por usar un capital prestado.
- La compensación que exige el prestamista por no poder usar el capital durante el tiempo que dura el préstamo y por el riesgo que corre de que no se lo devuelva.

Se llama ***interés*** al beneficio que se obtiene al prestar una cantidad de dinero, capital, durante un cierto tiempo.

Otra definición: También se puede definir como el beneficio que produce nuestro capital por el tiempo que no obra en nuestro poder.

Otra definición puede ser: la indemnización que percibe el propietario de un capital por la cesión de dicho capital durante cierto tiempo.

Es decir, el interés es la diferencia entre el capital final y el capital inicial.

■ Clases de capitalizaciones:

Capitalización simple: Consiste en una serie de operaciones en que interviene el **interés simple.**

Capitalización compuesta: Consiste en una serie de operaciones en que interviene el **interés compuesto.**

■ Tipos de interés:

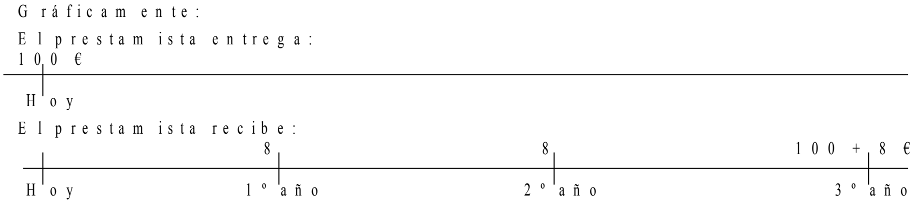
➢ ***Interés simple:***

Es el que se obtiene cuando los intereses producidos, durante todo el tiempo que dure una inversión, se deben únicamente al capital inicial.

Imaginemos una persona "**A**" que invierte un capital "**C**", con una tasa de interés "***i***". Al cabo de un año, "**A**" retira los intereses producidos por el capital y vuelve a dejar el mismo capital invertido. En el segundo año, vuelve a retirar los intereses y a invertir el mismo capital, etc. Cada año retira los intereses producidos por su capital "**C**" durante ese año.

Ejemplo: Supongamos que nos prestan 100 € al 8% simple anual durante 3 años.

El prestamista, en este caso, entrega 100 € hoy y recibirá 8 € al final de cada año y las 100 € al final del tercero.



El interés de cada año es el mismo: $I = 0{,}08 \times 100 = 8$ €

En capitalización simple se considera que el prestatario entrega los intereses cada período. El capital prestado es siempre el mismo. Y como consecuencia, el interés de cada año no cambia.

$$I_1 = I_2 = \ldots = I_n$$

- ***Interés compuesto:***

Es el que se obtiene cuando al capital se le suman periódicamente (en general, los periodos son anuales) los intereses producidos. Así, al final de cada periodo, el capital que se tiene es el capital anterior más los intereses producidos por ese capital en dicho periodo.

Imaginemos una persona "**B**" que invierte un capital "**C**", con una tasa de interés "***i***". En el primer año, el individuo "**B**" no retira el interés, lo invierte junto al capital anterior durante un año más. Y así sucesivamente.

En este caso, al contrario que en el interés simple, el capital varía y aumenta cada año, por tanto el interés también varia.

Ejemplo: Supongamos, al igual que en el interés simple, que nos prestan 100 € al 8% simple anual durante 3 años. El prestamista, en este caso, entrega 100 € hoy y el interés correspondiente al primer año será:

$$I_1 = i \cdot C_o = 0{,}08 \times 100 = 8\ €$$

Pero esas 8 € no las paga el prestatario en ese momento, sino que se acumulan al capital principal, lo que implica que ahora, transcurrido el 1º año, el prestatario debe 108 €, el capital C_o más el interés del primer año. Ahora al inicio del segundo año existirá un capital distinto un C_1:

$$C_1 = C_o + I_1 = 100 + 8 = 108\ €$$

Por lo tanto, el interés del segundo año será: $I_2 = i \cdot C_1 = 0{,}08 \times 108 = 8{,}64\ €$

Esas 8'64 € se las sigue quedando el prestatario, por lo que ahora debe como capital C_2:

$$C_2 = C_1 + I_2 = 108 + 8{,}64 = 116{,}64\ €$$

El interés del tercer año será: $I_3 = i \cdot C_2 = 0{,}08 \times 116{,}64 = 9{,}3312\ €$

Por lo que al cabo de tres años el prestatario entregará al prestamista las 100 € que le prestó y además los intereses de ese tiempo que serán:

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 = 8 + 8{,}64 + 9{,}3312 = 25{,}9712\ €$$

$$\textit{Es decir, el Capital final será}:\ C_n = C_o + I_T = 100 + 25{,}9712 = 125{,}9712 : \textit{redondeando}\ 125{,}97\ €$$

En la capitalización compuesta, los interese de cada período se acumulan al capital prestado para producir intereses en los períodos siguientes. Por eso se dice que en **capitalización compuesta los intereses son productivos.**

"I" en cada período el importe del interés es superior al del anterior $I_1 < I_2 < I_3 < \ldots\ldots < I_n$

- **Capitalización simple:**

- **Calculo del interés en capitalización simple:**

El interés **"I"** que produce un capital es directamente proporcional al capital inicial **"C"**, al tiempo **"n"**, y a la tasa de interés ***"i":*** $I = C_o \cdot i \cdot n$ **;** donde ***"i"*** está expresado en tanto por uno y **"n"** en años.

Como ya hemos visto, en la capitalización simple el interés **"I"** en cada período es el resultado de aplicar el rédito o tasa de interés o tanto por ciento **"i"** al capital inicial prestado **"C_o"**. Es decir:

$$I_1 = I_2 = \ldots = I_n = \frac{C_o \cdot r}{100} = C_o \cdot i$$

Por tanto, si el tiempo que dura el préstamo so **"n"** años, el interés total **"I_T"**, será la suma de los intereses de cada período: $I_T = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$

O lo, que es lo mismo: $I_T = C_0 \cdot i + C_0 \cdot i + \ldots + C_0 \cdot i$

Por lo tanto, si son **"n"** años los que dura el préstamo: $I_T = C_0 \cdot i \cdot n$

Expresión que nos permitirá calcular el interés que produce un capital **"C_o"** colocado al tanto unitario anual ***"i"*** durante **"n"** años.

Ejercicios: aplicaciones de la fórmula del interés simple

Ejercicio 1º: Calcular a cuánto asciende el interés simple producido por un capital de 25.000 € invertido durante 4 años a una tasa del 6 % anual.

Resolución:

Se ha de expresar el 6 % en tanto por uno, $\begin{matrix} 100 & \_\_\_\_\_\_\_\_ & 6 \\ 1 & \_\_\_\_\_\_\_\_ & x \end{matrix}$, donde $x = \frac{1 \times 6}{100} = 0'06$, por tanto, consiste en dividir ***"i"*** entre 100, para danos el rédito o tasa de interés en tanto por uno.

Por lo que la solución de este ejercicio será: $\boldsymbol{I = C_o \cdot i = 25000 \times 0'06 = 1500}$ ***euros.***

El interés **"I"** es de 1.500 €

Ejercicio 2º: Hallar el interés que produce en 7 años un capital de 200.000 € prestado al 9% de interés simple anual.

Resolución:

$$\boldsymbol{I = C_o \cdot i \cdot n = 200000 \times 0'09 \times 7 = 126000 \text{ euros.}}$$

Así 200.000 € en 7 años al 9% de interés simple anual produce 126.000 € de interés.

- **Cálculo del Capital, del tanto y del tiempo en capitalización simple:**

La expresión del interés relaciona éste con el capital, con el rédito o tasa de interés o con el tanto y con el tiempo. Cuando conozcamos tres de los componentes, podremos hallar el cuarto despejándolo de la expresión:

$$I = C_o \cdot i \cdot n$$

Así, si lo que queremos calcular es el capital **"C_o"**, despejando en la expresión anterior resulta:

$$C_o = \frac{I}{i \cdot n}$$

Si lo que queremos calcular es el tiempo **"n",** resultará: $n = \frac{I}{C_o \cdot i}$

Si lo que queremos calcular es el tanto **"*i*",** resultará: $i = \frac{I}{C_o \cdot n}$

No obstante, se recomienda que no se aprenda de memoria todas las expresiones, y resuelva los distintos problemas que se puedan plantear partiendo de la expresión general del interés:

$$I = C_o \cdot i \cdot n$$

Ejercicios:

Ejercicio 1º: Averiguar el capital que presté al 8% simple anual durante tres años si me han pagado de interés 30.000 €

Resolución:

$$\boldsymbol{I = C_o \cdot i \cdot n \Rightarrow C_o = \frac{I}{i \cdot n} = \frac{30000}{0'08 \times 3} = 125000 \text{ euros.}}$$

Luego el capital prestado **"C_o"** fue de 125.000 €

Ejercicio 2º: Hallar durante cuántos años presté 2.000.000 € al 15% anual simple si el interés total recibido ha sido de 300.000 €

Resolución:

$$I = C_o \cdot i \cdot n \quad \Rightarrow \text{n} = \frac{I}{C_o \cdot i} = \frac{300000}{2000000 \times 0'15} = 1 \text{ año}$$

La inversión a durado un año.

Ejercicio 3º: Hallar el tanto % anual simple al que presté durante 4 años un capital de 500.000 € si me pagaron de interés 80.000 €

Resolución:

$$I = C_o \cdot i \cdot n \Rightarrow i = \frac{I}{C_o \cdot n} = \frac{80000}{500000 \times 4} = 0'04 \Rightarrow 4\%$$

Luego el rédito es el 4% anual.

- **Cálculo del montante o capital final:**

Se llama montante **"C_n"** al valor de un capital en el momento **"n",** es decir, a la suma del capital prestado **"C_o"** más los intereses **"I"** producidos en el tiempo que dure el préstamo.

Así: $C_n = C_o + I$

Sustituyendo el interés en función del capital, tanto anual y tiempo en años resulta:

$$C_n = C_o + C_o \cdot i \cdot n$$

Sacando factor común: $C_n = C_o(1 + i \cdot n)$

Ejercicio 4º: Hallar el montante que alcanzó un capital de 200.000 € invertido al 8% anual durante 3 años.

Resolución:

$$C_n = C_o(1 + i \cdot n) = 200000(1 + 0'08 \times 3) = 248000 \text{ euros.}$$

Es decir que el prestamista entregó al prestatario 200.000 € y este tendrá que devolver las 200.000 € a demás pagarle de intereses 48.000 €, por lo que el importe total a pagar son 248.000 €

- **Cálculo del capital, rédito y tiempo en función del montante:**

Como podemos ver, en la expresión del montante intervienen cuatro componentes: el montante **"C_n",** el capital **"C_o",** el rédito o el tanto ***"i"*** y el tiempo **"n".** Luego, conociendo tres de los componentes, podremos hallar el cuarto a partir de la expresión: **$C_n = C_o + C_o\, in$**

Así, si lo que queremos calcular es el capital **"C_o"** resultará:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n) \quad De\ donde: C_0 = \frac{C_n}{1 + i \cdot n}$$

Si lo que queremos calcular es el rédito ***"i",*** resultará:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n) \quad De\ donde: i = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{n} \quad ó \quad C_n = C_o + C_o \cdot i \cdot n \quad De\ donde: i = \frac{C_n - C_0}{C_o \cdot n}$$

Si lo que queremos calcular es el tiempo **"n"** resultará:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n) \quad De\ donde: n = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{i} \quad ó \quad C_n = C_o + C_o \cdot i \cdot n \quad De\ donde: n = \frac{C_n - C_0}{C_o \cdot i}$$

Ejercicio 5º: Hallar el capital que se presto al 9% simple durante 5 años si se sabe que alcanzó un montante de 600.000 €

Resolución:

$$C_n = C_o(1 + i \cdot n) \Rightarrow C_o = \frac{C_n}{(1 + i \cdot n)} = \frac{600000}{(1 + 0'09 \times 5)} = 413793'10 \text{ euros.}$$

Ejercicio 6º: Hallar el tanto % al que se prestó un capital de 400.000 € durante 5 años si alcanzó un montante de 460.000 €

Resolución:

De una forma:

$$C_n = C_o(1+i\cdot n) \;\Rightarrow\; i = \frac{\frac{C_n}{C_o}-1}{n} = \frac{\frac{460000}{400000}-1}{5} = 0'03 \;\Rightarrow\; 3\%$$

De otra forma:

$$C_n = C_o + C_o\cdot i\cdot n \;\Rightarrow\; i = \frac{C_n - C_o}{C_o\cdot n} = \frac{460000 - 400000}{400000\times 5} = 0'03 \Rightarrow 3\%$$

Ejercicio 7º: Hallar durante cuántos años se prestó un capital de 500.000 € al 10% simple anual sabiendo que alcanzó un montante de 550.000 €

Resolución:

De una forma:

$$C_n = C_o(1+i\cdot n) \;\Rightarrow\; i = \frac{\frac{C_n}{C_o}-1}{i} = \frac{\frac{550000}{500000}-1}{0'10} = 1\text{ año}$$

De otra forma:

$$C_n = C_o + C_o\cdot i\cdot n \;\Rightarrow\; i = \frac{C_n - C_o}{C_o\cdot i} = \frac{550000 - 500000}{500000\times 0'10} = 1\text{ año.}$$

- **Correlación entre el tanto y el tiempo:**

Hemos calculado hasta ahora el Interés **"I"** y el Montante **"C_n"**, pero siempre en función del tanto ***"i"*** anual y del tiempo **"n"** medido en años.

¿Qué tendremos que hacer cuando el tanto sea anual pero el tiempo esté expresado en otra medida distinta al año?. En estos casos, es preciso establecer la **correlación** entre ambos, es decir que si el tanto es anual, debemos expresar también el tiempo en años.

Importante: Debemos tener en cuenta siempre que, en todos los casos, el tiempo "n" y el rédito "i" tienen que estar expresados en la misma unidad, años, días, etc.

Nota: Siempre, antes de comenzar a aplicar los datos en la expresión del Interés que conocemos, tenemos que ver si el tanto y el tiempo están referidos al mismo período. Si no lo están, como es este caso en que el tanto es anual y el tiempo está expresado en quincenas, procederemos a expresar éste en años. Por ejemplo: el tiempo en quincenas:

$$8\text{ quincenas} = \frac{8}{24}\text{ años.}$$

ya que como un año - - - - - - - - - - - tiene 24 quincenas

x años - - - - - - - - - - - tiene 8 quincenas

$$x = \frac{8\times 1}{24} = \frac{8}{24}\text{ años.}$$

Lo mismo haríamos si en vez de quincenas, estuviera en días, meses, trimestres o semestres, aplicaríamos la regla de tres:

ya que como un año - - - - - - - - - - - tiene un período k(días, meses, etc.)

x años - - - - - - - - - - - tiene n (según el caso expresado en días, meses, etc.)

$$x = \frac{n\cdot 1}{k} = \frac{n}{k}\text{ años.}$$

Es decir, **"*k*"** será:

- 24 si el tiempo **"n"** viene en quincenas y el tanto ***"i"*** en años.
- 365 (año natural) si el tiempo **"n"** viene en días y el tanto ***"i"*** en años.
- 360 (año comercial) si el tiempo **"n"** viene en quincenas y el tanto ***"i"*** en años.
- 12 si el tiempo **"n"** viene en meses y el tanto ***"i"*** en años.
- 4 si el tiempo **"n"** viene en trimestres y el tanto ***"i"*** en años.
- 3 si el tiempo **"n"** viene en cuatrimestres y el tanto ***"i"*** en años.
- 2 si el tiempo **"n"** viene en semestres y el tanto ***"i"*** en años.

Por tanto la fórmula del interés quedará de la siguiente manera: $I = C_o \cdot i \cdot \frac{n}{k}$

Es decir que cuando el tanto es anual y el tiempo viene expresado en fracción de año debemos dividir el tiempo por la constante **"*k*",** y así quedar en correlación que el tanto **"*i*"**.

Ejercicios:

Ejercicio 1º: Calcular el interés simple producido por 30.000 € durante 90 días a una tasa de interés anual del 5 %. (Año comercial)

Resolución:

$$I = C_o \cdot i \cdot \frac{n}{k} = 30000 \times 0'05 \frac{90}{360} = 375 \text{ euros.}$$

Ejercicio 2: Calcular el interés simple producido por 120.000 € durante 9 meses a una tasa de interés anual del 10%.

Resolución:

$$I = C_o \cdot i \cdot \frac{n}{k} \Rightarrow I = 120000 \times 0'10 \frac{9}{12} = 9000 \text{ euros.}$$

- **Fraccionamiento del tanto de interés (el tanto de interés K-esimal):**

Puede suceder otras veces que nos den el tanto referido a un período distinto del año. Ejemplo: tanto diario, mensual, semestral, trimestral, etc. Y el tiempo en una medida distinta.

Como sabemos el tiempo "n" y el tanto *"i"* deben ser correlativos, es decir expresados en la misma unidad.

Si el tanto viene expresado en períodos diarios, mensuales, trimestrales, etc., el tiempo deberá expresarse en días, meses, trimestralidades, etc.

Supongamos que el año se fracciona en **"*k*"** partes. Cada una de estas partes será un **k-ésimo** de año, es decir **1/k** de año. Y al tanto de interés simple correspondiente a ese k-ésimo le llamaremos **"i_k".**

Lógicamente, al dividir el año en varias partes, las unidades de tiempo aumentan en la misma proporción, de forma que si tomamos **k=2,** estamos dividiendo el año en dos partes (semestres), luego las unidades de tiempo se multiplican por 2.

Y si tomamos **k=4**, estamos dividiendo el año en 4 partes (trimestres), luego las unidades del tiempo se multiplican por 4. Y así sucesivamente.

Por tanto, si el número de años lo representamos por **"n"**, con un tipo de interés anual ***"i"***, al tomar un tipo de interés **"i_k"** el número de unidades de tiempo ya no será **"n",** sino **"nk".**

Para determinar la expresión del interés **"I"** o del montante **"C_n"** en capitalización simple cuanto el tanto y el tiempo sean fraccionarios, partiremos de la ya conocidas formulas:

$$I = C_o \cdot i \cdot n \quad y \quad C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

en la que sustituiremos el tanto ***"i"*** anual, por el ***"i_k"*** o tanto **k-esimal,** y el tiempo **"n"** expresado en años, por su valor medido en **k-ésimos, "nk",** de donde:

$$I = C_o \cdot i_k \cdot nk \quad y \quad C_n = C_0 \cdot (1 + i_k \cdot nk)$$

expresión esta última que nos determina el valor final **"C_n"** que se obtiene al invertir un capital inicial **"C_o"** a un tanto de interés simple **k-esimal *"i_k"*** durante **"nk"** períodos de tiempo, también **k-esimales.**

Ejercicios:

Ejercicio 1º: Hallar el interés de un capital de 100.000 € Invertido al 2% trimestral durante 2 años.

Resolución:

Como el tanto es trimestral, el tiempo lo tenemos que expresar en trimestres.

$$I = C_o \cdot i_k \cdot nk = 100000 \times 0'02 \times 2 \times 4 = 16000 \ euros.$$

Ejercicio 2º: Hallar el interés de un capital de 200.000 € Invertido al 3% cuatrimestral durante 10 meses

Resolución:

Como el tanto es cuatrimestral, el tiempo lo tenemos que expresar en cuatrimestres.

$$I = C_0 \cdot i_k \cdot nk = 200000 \times 0'03 \times \frac{10 \times 3}{12} = 15000 \ euros.$$

Ejercicio 3º: Hallar el interés de un capital de 300.000 € Invertido al 1% mensual durante 5 semestres.

Resolución:

Como el tanto es mensual, el tiempo lo tenemos que expresar en meses.

$$I = C_o \cdot i_k \cdot nk = 300000 \times 0'01 \times \frac{5 \times 12}{2} = 90000 \ euros.$$

De otra forma :

1 semestre son .... 6 meses

5 semestres .... x meses $\quad x = \frac{5 \times 6}{1} = 30 \ meses$

Ahora, sustituyendo los datos en la fórmula : $I = C_o \cdot i_k \cdot n = 300000 \times 0'03 \times 30 = 90000 \ euros.$

■ Capitalización compuesta:

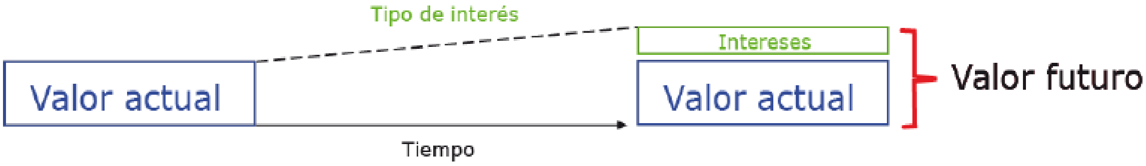
La característica fundamental de la capitalización compuesta, como ya vimos cuando iniciamos el tema de la capitalización simple, **es que los intereses son productivos,** es decir que se acumulan al capital principal para producir nuevos intereses.

Así en cada período, los intereses se calculan sobre el capital inicial más los intereses acumulados hasta el comienzo de dicho período.

Y mientras que la capitalización simple se utiliza normalmente para períodos inferiores al año, la capitalización compuesta se aplica habitualmente a períodos superiores al año.

- **<u>El valor futuro de un capital actual</u>:**

Las personas prestan su dinero a cambio de una ganancia o interés. El valor futuro es la cantidad a la que crecerá una inversión después de ganar los intereses.



- **<u>Fórmula general de la capitalización compuesta</u>:**

¿Cómo podemos calcular el montante "**C_n**" que se obtiene al invertir un capital inicial "**C_o**" a un tanto unitario de interés compuesto anual "***i***" durante "**n**" años?. Recordemos que "***i***" es tanto unitario, es decir que: i= r /100.

<u>Veamos la evolución del capital final período a período</u>:

Sea "**C_O**"un capital invertido durante "**n**" años a una tasa "***i***" de interés compuesto por cada año.

Partimos de la formula de capitalización simple, que ya conocemos: $I=C_0 \cdot i \cdot n$

Primer año:

Durante el primer año el capital "**C_0**" produce un interés $I_1=C_0 \cdot i \cdot 1$ El capital "**C_1**" final será: $C_1=C_o+I_1=C_0+C_0 \cdot i \cdot 1=C_0 \cdot (1+i \cdot 1)$

Segundo año:

Después del segundo año, el capital final "**C_1**" produce un interés $I_2=C_0 \cdot (1+i \cdot 1) \cdot i \cdot 1$. El capital final "**C_2**" será:

$$C_2=C_1+I_2=C_o \cdot (1+i \cdot 1)+C_o \cdot (1+i \cdot 1) \cdot i \cdot 1=C_0 \cdot (1+i \cdot 1) \cdot (1+i \cdot 1)=C_o \cdot (1+i \cdot 1)^2$$

Tercer año:

Después del tercer año, el capital final "**C_2**" produce un interés $I_3=C_o \cdot (1+i \cdot 1)^2 \cdot i \cdot 1$. El capital final "**C_3**" será:

$$C_3=C_2+I_3=C_o \cdot (1+i \cdot 1)^2+C_o \cdot (1+i \cdot 1)^2 \cdot i \cdot 1=C_o \cdot (1+i \cdot 1)^2 \cdot (1+i \cdot 1)=C_o \cdot (1+i \cdot 1)^3$$

Al cabo de "n" años:

Al cabo de "**n**" años el capital inicial "**C_0**" invertido en la modalidad de interés compuesto se convertirá en un capital final "***Cn***", que será:

$$C_n=C_{n-1}+I_n=C_o \cdot (1+i \cdot 1)^{n-1}+C_o \cdot (1+i \cdot 1)^{n-1} \cdot i \cdot 1=C_o \cdot (1+i \cdot 1)^{n-1} \cdot (1+i \cdot 1)=C_o \cdot (1+i \cdot 1)^n$$

El interés de cada período como vemos es el resultado de multiplicar el tanto unitario de interés "i" por el capital inicial al comienzo de ese período, es decir el capital final de período anterior.

De la observación de la evolución se desprende que los intereses son distintos en cada período, y esto es lógico porque se calculan cada año sobre un capital distinto.

El capital final en cada período es la suma del capital al comienzo del período (capital final del período anterior) más los intereses correspondientes a ese período.

En general, el capital final o montante en capitalización compuesta es: $\boxed{C_n=C_o \cdot (1+i)^n}$

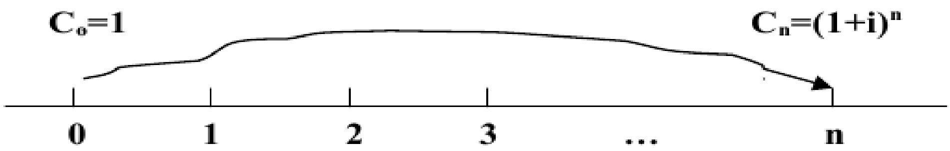
Cuando el capital inicial invertido sea una unidad monetaria, **C_o=1,** el capital final o montante "**C_n**" será: $C_n = C_o \cdot (1+i)^n = 1 \cdot (1+i)^n = (1+i)^n$

Por tanto **$(1+i)^n$** es el valor final que se obtiene al invertir una unidad monetaria a un tanto unitario de interés compuesto anual "***i***" durante "**n**" períodos anuales.

$$\boxed{(1+i)^n \quad \rightarrow Factor\ de\ capitalización}$$

Factor que sirve para trasladar capitales de un momento dado a otro posterior.

Gráficamente:



Si queremos calcular el valor final de "C_o" euros en lugar del de un euro, bastará multiplicar "**C_o**" por **$(1+i)^n$.**

Ejercicios: aplicaciones de la fórmula del interés compuesto.

Ejercicio 1º: Calcular el montante que se obtiene al invertir 100.000 € al 6% de interés compuesto anual durante 3 años.

Resolución:

$$C_n = C_o(1+i)^n ; \Rightarrow C_3 = 100000(1+0'06)^3 = 100000 \times 1'191016 = 119101'60 \text{ euros.}$$

Ejercicio 2º: Presté a un amigo 200.000 € hace cuatro años al 8 % de interés compuesto anual. ¿Qué capital deberá entregarme hoy?.

Resolución:

$$C_n = C_o(1+i)^n ; \Rightarrow C_4 = 200000(1+0'08)^4 = 200000 \times 1'3604896 = 272097'79 \text{ €.}$$

- **Cálculo de las distintas variables:**

Como podemos ver, en la expresión del montante intervienen cuatro componentes: el montante **"C_n"**, el capital **"C_o"**, el rédito o el tanto ***"i"*** y el tiempo **"n".** Luego, conociendo tres de los componentes, podremos hallar el cuarto a partir de la expresión:

$$C_n = C_o \cdot (1+i)^n$$

➔ ***Calculo del capital inicial "C_o":***

Fácilmente podemos calcular el valor del capital inicial "C_o" despejando de la expresión general:

$$C_n = C_o(1+i)^n ; \quad \Rightarrow \quad C_o = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$ También se puede expresar: $C_o = C_n(1+i)^{-n}$

➔ ***Calculo del intereses totales "I" en la capitalización compuesta:***

Puesto que el interés es la diferencia entre el capital final y el inicial:

$I = C_n - C_o = C_o(1+i)^n - C_o$ y sacando factor común "C_o": $I = C_o\left[(1+i)^n - 1\right]$

➔ ***Calculo de la tasa de interés "i":***

La tasa de interés se obtiene despejando en la fórmula general:

$$C_n = C_o(1+i)^n ; \quad \Rightarrow \quad \frac{C_n}{C_o} = (1+i)^n \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_o}} = 1+i \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_o}} - 1 \quad \Rightarrow \quad i = \left(\frac{C_n}{C_o}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

➔ ***Calculo del tiempo "n":***

El tiempo se obtiene despejando de la formula general:

$$C_n = C_o(1+i)^n; \quad \Rightarrow \quad \frac{C_n}{C_o} = (1+i)^n$$

Tomamos logaritmos:

$$\text{Log}\frac{C_n}{C_o} = \log(1+i)^n \quad \Rightarrow \log C_n - \log C_o = n \cdot \log(1+i) \quad \Rightarrow n = \frac{\log C_n - \log C_o}{\log(1+i)}$$

No obstante, se recomienda que no se aprenda de memoria todas las expresiones, y resuelva los distintos problemas que se puedan plantear partiendo de la expresión general:

$$C_n = C_o \cdot (1+i)^n$$

■ **El valor actual de un capital futuro:**

El dinero se puede invertir y obtener unos intereses, por lo que no es lo mismo disponer de un euro hoy que de un euro mañana.

Principio financiero básico: "Un euro hoy vale más que un euro mañana"

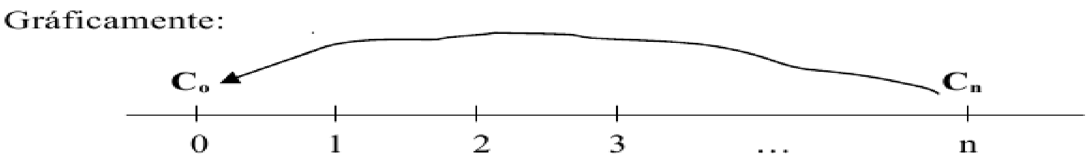
Al igual que si queremos comparar distancias medidas en metros con otras medidas en kilómetros debemos convertirlas a la misma unidad, para establecer comparaciones entre cantidades cobradas o pagadas en distintos momentos de tiempo, debemos homogeneizarlas al mismo momento. Para ello empleamos dos técnicas básicas: capitalizar (llevar una cantidad actual a su valor futuro) o actualizar (traer al presente una cantidad futura).

Si quisiéramos calcular el valor del capital inicial, valor actual "C_o" despejando de la expresión general:

$$C_n = C_o(1+i)^n; \quad \Rightarrow \quad C_o = \frac{C_n}{(1+i)^n} \quad \text{También se puede expresar: } C_o = C_n(1+i)^{-n}$$

siendo **$(1+i)^{-n}$** el **factor de actualización** en la capitalización compuesta y que servirá, por tanto, para trasladar capitales de un momento dado a otro anterior, es decir, para hacer traslaciones negativas de capital.

$$\boxed{\frac{1}{(1+i)^n} \rightarrow \textit{Factor de actualización}}$$



Bastará así multiplicar el capital final por el factor de actualización para obtener el capital inicial.

Actualizar también se denomina "descontar" y a $\frac{1}{(1+i)^n}$ factor de descuento.

Ejercicios:

Ejercicio 1º: Calcular el capital que invertido al 6 % de interés compuesto anual durante 9 años alcanzó al cabo de los mismos un montante de 2.030,79 €

Resolución:

$$C_0 = VA = \frac{C_n}{(1+i)^n} = \frac{2030{,}79}{(1+0{,}06)^9} = 1202{,}02\ €$$

Ejercicio 2º: Averiguar el sueldo mensual que tenía un trabajador hace 10 años si hoy cobra 721,21 € mensuales y la tasa anual de aumento de sueldo ha sido del 8 % acumulativo.

Resolución:

$$C_0 = VA = \frac{C_n}{(1+i)^n} = \frac{2030{,}79}{(1+0{,}08)^{10}} = 334{,}06\ €$$

Ejercicio 3º: Determinado capital colocado al 6% de interés compuesto anual ha producido en 14 años un montante de 4.755,91 € Hallar el capital.

Resolución:

$$C_0 = VA = \frac{C_n}{(1+i)^n} = \frac{4755{,}91}{(1+0{,}06)^{14}} = 2103{,}54\ €$$

■ Utilización de tablas financieras:

En la resolución de los problemas anteriores debemos a veces elevar **(1+i)** a la tercera o cuarta o más potencia para determinar el valor del capital final. Cuando esos cálculos se hacen a mano son bastante laboriosos, pero hoy en día hay calculadoras con funciones avanzadas que lo facilitan de forma extraordinaria.

No obstante, dichos cálculos se simplifican mucho, también, con la utilización de Tablas Financieras, en las que vienen ya determinadas y debidamente ordenadas los resultados de múltiples operaciones de uso frecuente en el cálculo financiero.

Dichas tablas se estructuran de la siguiente manera:

- ♦ La 1ª fila indica los tantos de interés.
- ♦ La 1ª columna indica los períodos, es decir el tiempo "n".

Así, si **n = 2** e **i = 0'04** habremos de buscar el 2 en la columna de períodos (columna 1ª) y el 4 % en la fila del tipo de interés (fila 1ª) y en la confluencia de ambos obtenemos el valor 1'081600, que nos indica que el montante que se obtiene al invertir una unidad monetaria durante dos años al 4% de interés compuesto anual es, precisamente, ese valor.

Si en lugar del valor final de una peseta lo que tratamos de calcular es el valor final de un capital inicial "C_o", bastará multiplicar por "C_o" el valor que previamente hayamos obtenido en tablas según el tanto y el tiempo al que se realizó la inversión.

✓ ***Interpolación:***

Puede pasar que al buscar en la tabla o los períodos o el tanto no aparece, por lo que debemos interpolar, lo explicaremos con ejemplos:

Ejemplos:

Ejemplo 1º: Calcular el montante que se obtiene al invertir 15.000 € Al 6% de interés compuesto anual durante 4 años y tres meses.

Resolución:

El tiempo de 4 años y 3 meses es: $4+\frac{3}{12}=4+0'25=4'25$ años

Al ir a las tablas nos encontramos:

Para 4 años: 1'262477
Para 4'25 años: ¿.?
Para 5 años: 1'338226

Conocemos así el montante para **n = 4** y para **n = 5**

Calculemos la diferencia de montantes:

Montante para n = 5..........1'338226
Montante para n = 4.........1'262477
Diferencia........................0'075749

Observamos que a un año de diferencia en el tiempo (5 – 4 = 1) de inversión corresponde una diferencia de 0'075749

Por tanto, a una diferencia en tiempo de 0'25 años, (4'25 – 4), le corresponderá una diferencia X en montante, lo cual se resuelve mediante una simple regla de tres:

a 1 año ……………………… 0'075749 diferencia de montante
a 0'25 años…………………. X diferencia de montante

de donde: $X=\frac{0'075749\times0'25}{1}=0'018937$

Para determinar el montante correspondiente a los 4'25 años, bastará sumar ahora al montante obtenido para n = 4, el obtenido para h = 0'25.

$$1'262477 + 0'018937 = 1'281414$$

Es decir: $(1+0'06)^{4'25} = 1'281414$

Y aplicando este valor a la expresión general resulta:

$$\boldsymbol{C_n = C_0(1+i)^n = 15000 \times 1'281414 = 19221'21 euros.}$$

Ejemplo 2º: Un capital de 1.000.000 € Invertido durante 9 años alcanzó un montante de 1.900.000 € Determinar el tanto al que se invirtió.

Resolución:

Operando resulta: $\frac{C_n}{C_o} = (1+i)^n; \frac{1900000}{1000000} = 1'9 = (1+i)^9$

Al ir a las tablas nos encontramos:

Para 8 %: 1'999005
Para ¿.?: 1'9
Para 7%: 1'838459

Conocemos así el montante para **i =8%** y para **i = 7%**

Calculemos la diferencia de montantes:

Montante para i = 8%.......1'999005
Montante para i = 7%......1'838459
Diferencia........................0'160546

Calculemos la diferencia de montantes:

Montante para i = 7+x......1'9
Montante para i = 7%......1'838459
Diferencia........................0'061541

Observamos que a una diferencia porcentual de 1% (8 – 7 = 1) corresponde una diferencia de 0'160546

Observamos también una diferencia porcentual entre el menor porcentual de la tabla 7% y el porcentual a hallar 7+x de 0'061541.

Por tanto, a través de una simple regla de tres:

a 1 % ……………………… 0'160546 diferencia de montante
a x ……………………… 0'061541 diferencia de montante

de donde: $X = \frac{0'061541 \times 1}{0'160546} = 0'383323160$

Para determinar el tanto al que se realizó la inversión, bastará sumar ahora al porcentaje menor de la tabla, en este caso, 7%, el obtenido para x = 0'383323160

$$7 + x = 7 + 0'383323160 = 7'383323160 \cong 7'383323\%$$

Es decir, que el tanto al que se realizó la inversión fue del 7'383323% compuesto anual.

■ **Fraccionamiento del tanto en capitalización compuesta**:

Consideramos el año dividido en **"k"** partes, y designamos al tanto correspondiente a cada **k-ésimo** por ***"i"***.

La correlación entre el tanto y el tiempo, de la que ya hablamos en Capitalización simple, debe tenerse también aquí en cuenta en la Capitalización compuesta.

Entonces, si el tanto es ***"i_k",*** el tiempo **"n"** que dura la inversión también deberemos expresarlo en **k-ésimos,** y el número de períodos a considerar será **"n.k".** Teniendo en cuenta que **"k"** es el número en que este dividido el año: será 2 si es semestres, 4 si es trimestres, etc.

De acuerdo con esto, la expresión que teníamos del montante en Capitalización compuesta:

$$C_n = C_o(1+i)^n$$

expresada ahora para tanto y tiempo fraccionarios será: $C_n = C_o(1+i_k)^{nk}$

que indica $\mathbf{C_n}$ obtenido al invertir un capital inicial $\mathbf{C_o}$ durante **"n.k" k-ésimos** a un tanto unitario de interés compuesto **k-esimal "i_k".**

Aunque la fórmula del interés compuesto se ha deducido para una tasa de interés anual durante *n* años, todo sigue siendo válido si los periodos de conversión son semestres, trimestres, días, etc., sin más que convertir éstos a años:

Si los periodos de conversión son semestrales, $C_n = C_o(1+i_k)^{nk} = C_o(1+i_2)^{2n}$

Si los periodos de conversión son trimestrales, $C_n = C_o(1+i_k)^{nk} = C_o(1+i_4)^{4n}$

■ **Equivalencia de tantos en capitalización compuesta**:

Dos tantos son equivalentes, cuando aplicados al mismo capital inicial durante el mismo tiempo, producen el mismo interés o se obtiene el mismo capital final o montante.

Partiendo de esta definición, vamos a ver qué relación deben guardar ***"i"*** e ***"i_k"*** para que sean equivalentes en capitalización compuesta.

El capital final o montante, según lo visto anteriormente, pueden expresarse de las siguientes maneras:

$$Así: \quad C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \qquad o\ así: C_n = C_0 \cdot (1+i_k)^{nk}$$

Como el capital final ha de ser igual en las dos expresiones, resulta:

$$C_0 \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i_k)^{nk}$$

Como el capital inicial, según la definición, también es igual en las dos expresiones, simplificamos nos queda:

$$(1+i) = (1+i_k)^{nk}$$

Sacando la raíz n-ésimal en ambos miembros, resulta:

$$\sqrt[n]{(1+i)^n} = \sqrt[n]{(1+i_k)^{nk}} \quad de\ donde: \ (1+i) = (1+i_k)^k \quad (1)$$

Y restando una unidad a ambos miembros de la igualdad, obtenemos el valor de ***"i"*** en función de ***"i_k"*** de la forma:

$$(1+i)-1 = (1+i_k)^k - 1 \quad \rightarrow \quad i = (1+i_k)^k - 1 \quad (2)$$

Para determinar el valor de ***"i_k"*** en función de ***"i"***, partiendo de la fórmula (1) calcularemos la raíz k-ésima en ambos miembros de la igualdad, con lo que resulta:

$$(1+i)=(1+i_k)^k \quad (1) \quad \rightarrow \quad \sqrt[k]{(1+i)}=\sqrt[k]{(1+i_k)^k} \quad de\ donde: \ \sqrt[k]{(1+i)}=1+i_k$$

Y restando una unidad a ambos miembros de la igualdad, obtenemos el valor de ***"i_k"*** en función de ***"i"***, de la forma:

$$\sqrt[k]{(1+i)}-1=1+i_k-1 \quad \rightarrow \quad \sqrt[k]{(1+i)}-1=i_k \quad o\ bien: \ i_k=(1+i)^{\frac{1}{k}}-1 \quad (3)$$

$$\boxed{i=(1+i_k)^k-1 \quad (2) \qquad y \qquad i_k=(1+i)^{\frac{1}{k}}-1 \quad (3)}$$

De la observación de la expresiones (2) y (3) se deduce que en Capitalización compuesta, no se da la proporcionalidad de tantos que se daba en la Capitalización simple.

Ejercicios:

Ejercicio 1º: Determinar el tanto de interés compuesto anual equivalente al 5% semestral.
Resolución:

$$i=(1+i_k)^k-1=(1+0'05)^2-1=0'1025$$

Es decir, que el tanto efectivo anual **equivalente** al 5% semestral no es el 10% sino el 10'25%.

Si recordamos que en Capitalización compuesta los intereses son productivos, comprenderemos que cuando más se fraccione el tiempo, más veces se acumulan los intereses al capital principal para producir nuevos intereses.

- **Equivalencia de capitales en capitalización compuesta:**

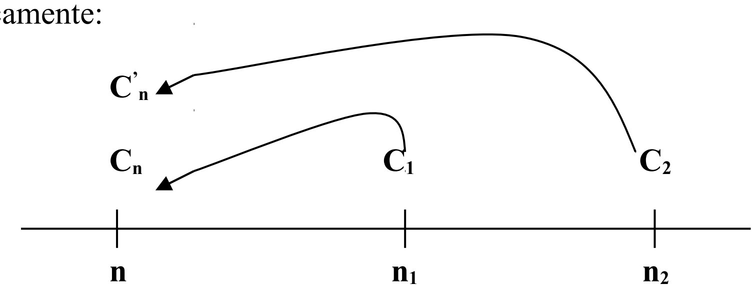
Dos capitales C_1 y C_2 que vencen en los momentos n_1 y n_2 respectivamente son equivalentes, cuando valorados a un mismo tanto, en el mismo momento n, tienen la misma cuantía.

Sea ***"i"*** el tanto unitario anual compuesto al que se valoran.

Pueden plantearse tres casos distintos:

A) Que $n < n_1 < n_2$

Gráficamente:



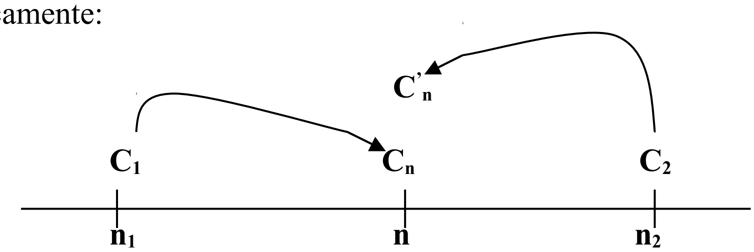
El valor de cada capital en el momento ***n*** será:

$$C_n=C_1\cdot(1+i)^{(n-n_1)}$$
$$C_n^{'}=C_2\cdot(1+i)^{(n-n_2)}$$

Si $\mathbf{C_n = C'_n}$ los capitales $\mathbf{C_1}$ **y** $\mathbf{C_2}$ son equivalentes en el momento **"n".**

B) Que $n_1 < n < n_2$

Gráficamente:



El valor de cada capital en el momento ***n*** será:

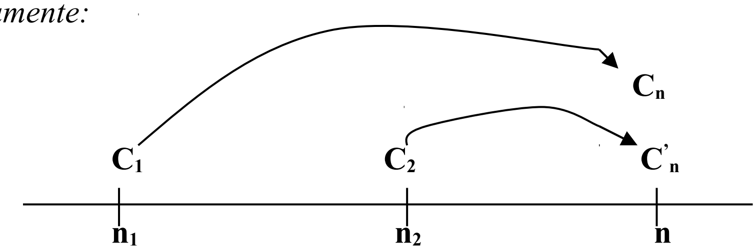
$$C_n = C_1 \cdot (1+i)^{(n-n_1)}$$

$$C'_n = C_2 \cdot (1+i)^{(n_2-n)}$$

Si **$C_n = C'_n$** los capitales **C_1 y C_2** son equivalentes en el momento **"n".**

C) Que $n_1 < n_2 < n$

Gráficamente:



n_1 n_2 n

El valor de cada capital en el momento ***n*** será:

$$C_n = C_1 \cdot (1+i)^{(n-n_1)}$$

$$C'_n = C_2 \cdot (1+i)^{(n-n_2)}$$

Si **$C_n = C'_n$** los capitales **C_1 y C_2** son equivalentes en el momento **"n".**

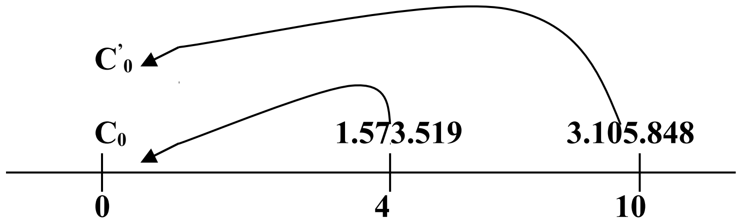
Ejemplo: Averiguar si al 12% de interés compuesto anual son equivalentes un capital de 1.573.519 € con vencimiento dentro de 4 años, y otro de 3.105.848 € con vencimiento dentro de 10 años.

- Caso A: En el momento 0
- Caso B: En el momento 5
- Caso C: En el momento 13

Resultado:

Caso A)

Gráficamente:



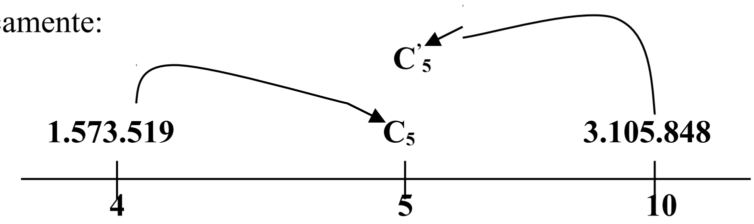
El valor de cada capital en el ***momento "0"*** se obtendrá ***actualizando*** cada uno de ellos al 12% por el tiempo que media desde hoy a cada vencimiento. Así obtendremos:

$$C_0 = C_1 \cdot (1+i)^{(n-n_1)}; \qquad C'_5 = C_2(1+i)^{(n-n_1)}$$
$$C_0 = 1573519(1+0'12)^{-4} = 1000000 \text{ euros.}$$
$$C'_0 = 3105848(1+0'12)^{-10} = 1000000 \text{ euros.}$$

Como $C_0 = C'_0$= 1.000.000 € los capitales propuestos son equivalentes en el momento ***"0".***

Caso B)

Gráficamente:



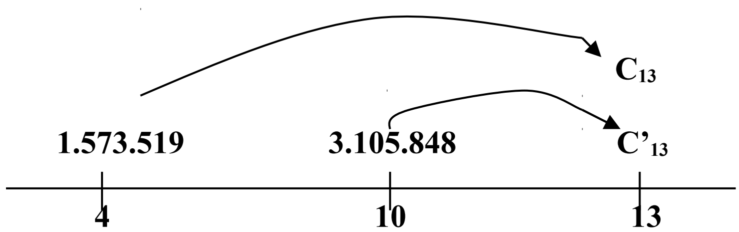
El valor de cada capital en el ***momento "5"*** será:

$$C_5 = C_1(1+i)^{(n-n_1)}; \qquad C'_5 = C_2(1+i)^{(n_2-n)}$$
$$C_5 = 1573519(1+0'12)^{1} = 1762341 \text{ euros.}$$
$$C'_5 = 3105848(1+0'12)^{-5} = 1762341 \text{ euros.}$$

Como $C_5 = C'_5$= 1.762.341 € los capitales propuestos son equivalentes en el momento ***"5".***

Caso C)

Gráficamente:



El valor de cada capital en el ***momento 13*** será:

$$C_n = C_1 \cdot (1+i)^{(n-n_1)}; \quad C'_n = C_2 \cdot (1+i)^{(n-n_2)}$$
$$C_{13} = 1573519(1+0¡12)^{9} = 4363492 \text{ euros.}$$
$$C'_{13} = 3105848(1+0'12)^{3} = 4363492 \text{ euros.}$$

Como C_{13} C'_{13} = 4.363.492 € los capitales propuestos son equivalentes en el momento ***"13".***

En los tres casos los capitales son equivalentes. Y es que ***en capitalización compuesta, si dos capitales son equivalentes en un momento, lo son en cualquier otro.***

■ **Tanto nominal "J_k":**

El tanto nominal **"J_k"** es aquel que se obtiene al multiplicar el tanto k-esimal ***"i_k"*** por el número de k-ésimos, **"k".** $J_k = k \cdot i_k$

Se llama **NOMINAL**, porque nos va a servir para **NOMBRAR** o designar a otro, el tanto k-esimal, ***"i_k".***

Como en ocasiones anteriores, ***"k"*** nos sigue indicando el número de partes en que se divide el año y, por tanto, el número de veces que se produce la acumulación de intereses al capital principal a lo largo del año.

J_k puede expresarse, indistintamente, como:

- Tanto nominal convertible, o acumulable, o capitalizable ***"k"*** veces al año.

Así, por ejemplo, J_2 es:

- Tanto nominal capitalizable por semestres (dos veces al año), o
- Tanto nominal convertible 2 veces al año, o
- Tanto nominal acumulable 2 veces al año.

Si k = 1 $J_k = J_1$ Tanto nominal acumulable por años.
Si k = 2 $J_k = J_2$ Tanto nominal acumulable por años.
Si k = 3 $J_k = J_3$ tanto nominal acumulable por cuatrimestres.
… … …
Si k = 12 $J_k = J_{12}$ Tanto nominal acumulable por meses.
… … …

Partiendo de que $J_k = k.i_k$, solamente cuando $k = 1$ coincidirán el tanto nominal y el tanto efectivo anual:

$$J_k = k \cdot i_k \quad \Rightarrow \quad J_1 = 1 \cdot i_1 = i$$

Para los demás valores de ***k*** puede tomar, J_k será distinto de ***i***, ya que como sabemos:

$$i = (1 + i_k)^k - 1$$

De lo visto hasta ahora, podemos apreciar que hay ***distintas formas de enunciar el tanto:***

a) Tanto efectivo ***i*** para períodos anuales.
b) Tanto efectivo k-esimal i_k para períodos k-esimales.
c) Tanto nominal J_k que únicamente nos sirve para determinar i_k. $i_k = \dfrac{J_k}{k}$

Y la expresión del montante en Capitalización compuesta podrá tomar, así mismo, distintas formas, de acuerdo con lo anterior:

a) Si el tanto conocido es el ***i*** efectivo anual: $C_n = C_o \cdot (1+i)^n$

b) Si el tanto conocido es el i_k efectivo k-esimal: $C_n = C_o \cdot (1+i_k)^{n \cdot k}$

c) Si el tanto conocido es el nominal J_k: $C_n = C_o \cdot \left(1 + \dfrac{J_k}{k}\right)^{n \cdot k}$

Por lo que de ahora en adelante deberemos prestar suma atención a la hora de enunciar el tanto, y recordar que nominal, convertible o acumulable hacen referencia al tanto nominal J_k.

Ejercicio 1º: Calcular el montante que se obtuvo al invertir un capital de 70.000 € al 8% nominal capitalizable por semestres, durante 5 años.

Resolución:

$$C_n = C_o \cdot \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^{n \cdot k}; \Rightarrow C_n = 70000\left(1 + \frac{0'08}{2}\right)^{5\times2} = 70000(1 + 0'04)^{10}$$

$$C_n = 70000 \times 1'480244 = 103617'10 \text{ euros.}$$

Ejercicio 2º: Determinar el tanto efectivo anual al que se realizó la inversión del ejemplo anterior.

Resolución:

$$i_k = \frac{J_k}{k} = \frac{0'08}{2} = 0'04 \quad i = (1 + i_k)^k - i = (1 + 0'04)^2 - 1 = 1'0816 - 1 = 0'0816 \quad \Rightarrow 8'16\%$$

Comprobación:

$$C_n = C_o \cdot (1 + i)^n = 70000 \times 1'480244 = 103617'10 \text{ euros.}$$

■ Tasa Anual equivalente (TAE):

Se conoce con el nombre de Tasa Anual Equivalente (TAE) al tanto de interés anual compuesto que equivale a uno dado.

Si tenemos como dato k-esimal i_k, siguiendo el criterio ya expuesto para la equivalencia de tantos, el tanto anual equivalente será:

$$TAE = i = (1 + i_k)^k - 1$$

En toda operación financiera se produce un intercambio de prestaciones dinerarias: una parte anticipa un capital y recibe a cambio pagos futuros. A lo largo de la vida de la operación, en diversos momentos pueden darse movimientos de capital en una u otra dirección.

El tipo de interés efectivo de una operación es aquel que iguala el valor actual de las prestaciones y de las contraprestaciones.

Si se actualiza al momento inicial, por una parte los pagos y por otra parte los cobros, el tipo de interés efectivo es aquel que iguala estos dos valores iniciales.

Las inversiones y productos financieros tienen distintos plazos, comisiones y rentabilidades.

Para facilitar la comparación y transparencia, el Banco de España, obliga a que en toda operación financiera, la entidad de crédito tiene que comunicar el tipo TAE (Tasa Anual Equivalente), desde el año 1990 (norma 8/1990 sobre "Transparencia de las operaciones y protección de la clientela").

➔ **La Tasa Anual Equivalente o Tasa Anual Efectiva tiene en cuenta el tipo de interés nominal, las comisiones y el plazo de la operación.**

Cuando la entidad financiera calcula el TAE de una operación, en la parte de ingresos incluye no sólo los derivados del tipo de interés, sino también los ingresos por comisiones y cualquier otro tipo de ingreso derivado de la operación.

El TAE es el tipo de interés efectivo, expresado en tasa anual, pospagable.

Es decir, para calcular el TAE:

a) Se calcula el tipo de interés efectivo de la operación
b) Conocido este tipo efectivo, se calcula el tipo anual, pospagable (TAE) equivalente

El tipo TAE, al venir siempre expresado como tasa anual, pospagable, permite comparar el coste real o rendimiento real de diversas operaciones, en aquellos casos en que sus tipos de interés nominales no son directamente comparable:

Por ejemplo: si el tipo de interés de un crédito viene expresado en tasa trimestral, y el de otro crédito en tasa semestral, estos tipos no son directamente comparables. Pero si calculamos sus TAEs, ya sí se pueden comparar.

Ejemplos:

Ejercicio 1º: Se solicita un crédito de 6.010,12 € que hay que devolver en 2 pagos semestrales de 3.305,57 €. Calcular el TAE:

Resolución:

Los flujos de capital son los siguientes:

Meses	Flujo
0	+6.010,12
6	-3.305,57
12	-3.305,57

Se analiza la operación desde el punto de vista del cliente. Los importes que recibe van con signo positivo, y los que paga van con signo negativo. Se podría haber realizado desde el punto de vista del banco, cambiando los signos

1.- Se calcula el tipo de interés efectivo

$$\text{Calculo del tipo de interés efectivo:}$$

$$6010{,}12 = 3305{,}57(1+i_2)^{-1} + 3305{,}57(1+i_2)^{-2} \Rightarrow$$

$$6010{,}12 = \frac{3305{,}57}{1+i_2} + \frac{3305{,}57}{(1+i_2)^2} \Rightarrow$$

$$6010{,}12 = \frac{1}{1+i_2}\left(3305{,}57 + \frac{3305{,}57}{1+i_2}\right) \Rightarrow$$

$$6010{,}12(1+i_2) = 3305{,}57 + \frac{3305{,}57}{1+i_2} \Rightarrow$$

$$6010{,}12(1+i_2) - 3305{,}57 = \frac{3305{,}57}{1+i_2} \Rightarrow$$

$$6010{,}12 + 6010{,}12 \cdot i_2 - 3305{,}57 = \frac{3305{,}57}{1+i_2} \Rightarrow$$

$$(6010{,}12 + 6010{,}12 \cdot i_2 - 3305{,}57)(1+i_2) = 3305{,}57 \Rightarrow$$

$$(2704{,}55 + 6010{,}12 \cdot i_2)(1+i_2) = 3305{,}57 \Rightarrow$$

$$2704{,}55 + 6010{,}12 \cdot i_2 + 2704{,}55 \cdot i_2 + 6010{,}12 \cdot i_2^2 = 3305{,}57 \Rightarrow$$

$$2704{,}55 + 8714{,}67 \cdot i_2 + 6010{,}12 \cdot i_2^2 - 3305{,}57 = 0 \Rightarrow$$

$$6010{,}12 \cdot i_2^2 + 8714{,}67 \cdot i_2 - 601{,}02 = 0 \Rightarrow \text{ecuación de 2º grado} \Rightarrow$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8714{,}67 \pm \sqrt{8714{,}67^2 + 4 \times 6010{,}12 \times 601{,}02}}{2 \times 6010{,}12} =$$

$$0{,}06596 \quad \text{y} \quad -1{,}51596 \quad \text{de estos dos resultados el lógico es:}$$

$$0{,}06596 \text{ que es } i_2 \text{ trimestral}$$

2.- Calculado el tipo de interés efectivo, se calcula su equivalente TAE:

Se aplica la fórmula, $(1 + i) = (1 + i_2)^2$ (donde i es el tipo TAE)

$$(1+i) = (1+i_2)^k \Rightarrow (1+i) = (1+i_2)^2 \Rightarrow i = (1+i_2)^2 - 1 \Rightarrow$$

$$i = (1+0{,}06596)^2 - 1 = 0{,}13627 \Rightarrow 13{,}627\%$$

Por lo tanto, la tasa TAE de esta operación es el 13,628%

Ejercicio 2º: Se deposita en un banco 3.305,57€ el 1 de enero, y otras 3.305,57 € el 1 de julio. A final de año se recibe del banco 7.212,15 €. Calcular el TAE de la operación.

Resolución:

a) Los flujos de capital son los siguientes:

Meses	Flujo
0	-3.305,57
6	-3.305,57
12	+7.212,15

Se analiza la operación desde el punto de vista del cliente. Los importes que recibe van con signo positivo y los que paga con signo negativo.

b) Se calcula el tipo de interés que iguala el valor en el momento inicial de la prestación y de la contraprestación:

Calculo del tipo de interés efectivo :

$$3305{,}57 + 3305{,}57(1+i_2)^{-1} = 7212{,}15(1+i_2)^{-2}$$

$$3305{,}57 + \frac{3305{,}57}{1+i_2} = \frac{7212{,}15}{(1+i_2)^2} \Rightarrow 3305{,}57 = \frac{7212{,}15}{(1+i_2)^2} - \frac{3305{,}57}{1+i_2}$$

$$3305{,}57 = \frac{7212{,}15 - 3305{,}57(1+i_2)}{(1+i_2)^2} \Rightarrow 3305{,}57(1+i_2)^2 = 7212{,}15 - 3305{,}57(1+i_2) \Rightarrow$$

$$3305{,}57(1+i_2)^2 + 3305{,}57(1+i_2) - 7212{,}15 = 0 \Rightarrow$$

$$3305{,}57(1+2\cdot i_2 + i_2^2) + 3305{,}57 + 3305{,}57\cdot i_2 - 7212{,}15 = 0 \Rightarrow$$

$$3305{,}57 + 6611{,}14\cdot i_2 + 3305{,}57\cdot i_2^2 + 3305{,}57 + 3305{,}57\cdot i_2 - 7212{,}15 = 0$$

$$3305{,}57\cdot i_2^2 + 9916{,}71\cdot i_2 - 601{,}01 = 0 \Rightarrow \text{ecuación de 2º grado} \Rightarrow$$

$$\frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9916{,}71 \pm \sqrt{9916{,}71^2 + 4\times 3305{,}57\times 601{,}01}}{2\times 3305{,}57} =$$

$$0{,}05943 \quad \text{y} \quad -3{,}05943 \quad \text{de estos dos resultados el lógico es :}$$

$$0{,}05943 \text{ que es } \mathrm{i}_2 \text{ trimestral}$$

c) Conocido el tipo de interés efectivo, se calcula su equivalente TAE:

$$(1+i) = (1+i_2)^k \Rightarrow (1+i) = (1+i_2)^2 \Rightarrow i = (1+i_2)^2 - 1 \Rightarrow$$

$$i = (1+0{,}05943)^2 - 1 = 0{,}1224 \Rightarrow 12{,}24\%$$

Por lo tanto, la tasa TAE de esta operación es el 12,24%

Ejercicio 3º: Hallar el tanto anual equivalente al 7% semestral compuesto.

Resolución: $i = (1+i_k)^k - 1 = (1+0'07)^2 - 1 = 0'1449 \Rightarrow 14'49\%$

Si tenemos como dato el tanto nominal $\boldsymbol{J_k}$ dado que $i_k = \frac{J_k}{k}$, el tanto anual equivalente $\boldsymbol{i}$ será:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1$$

Ejercicio 4º: Hallar el tanto anual equivalente al 12% nominal capitalizable por trimestres.

Resolución: $i = \left(1+\frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1+\frac{0'12}{4}\right)^4 - 1 = 0'1255 \Rightarrow 12'55\%$

Es muy habitual el uso del TAE en las operaciones bancarias, ya que el Banco de España obliga a las entidades financieras a informar a sus clientes de cuál es la tasa anual equivalente a la que le ha resultado cualquier operación que realice.

Ejercicio 5º: Un banco ofrece un 12% nominal acumulable por meses por un depósito de 2.000.000 €

a) Averiguar cuál es el interés que corresponde al primer mes, al segundo y al tercero, si se lleva a cabo la operación.
b) Hallar la tasa anual equivalente TAE teniendo en cuenta que la liquidación es mensual y que los intereses se irán acumulando al capital cada mes a lo largo del año.

Resolución:

a) $i_{12} = \frac{J_{12}}{12} = \frac{0'12}{12} = 0'01$

Por tanto, **el interés del primer mes** será: $\boldsymbol{I_1 = 2000000 \times 0'01 = 20000}$ **€.**

Si, como dice la información, el interés producido en el primer mes se acumula al capital para producir nuevos intereses en el segundo, el capital que produce intereses durante el segundo mes es 2.020.000 €, y **los intereses del segundo mes** será: $\boldsymbol{I_2 = 2020000 \times 0'01 = 20200}$ ***euros.***

El capital acumulado ahora es de 2.040.200 €, y **los intereses del tercer mes** será

$$\boldsymbol{I_3 = 2040200 \times 0'01 = 20402 \text{ euros.}}$$

b) La tasa anual equivalente (TAE) al tanto nominal acumulable será aquel tanto ***"i"*** que cumpla:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1 \qquad \text{Sustituyendo los datos resulta:}$$

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0'12}{12}\right)^{12} - 1 = 0'12682503 \Rightarrow 12'6825\% \text{efectivo anual.}$$

Ejercicio 6º: Las cuentas Postaldiner de Caja Postal se caracterizan porque los intereses se calculan diariamente, y se acumulan al capital también diariamente para producir nuevos intereses.

Un inversor abrió una cuenta Postaldiner hace 54 días y depositó 2.027.730 € Si hoy dispone de 2.030.445 €, determinar:

a) El **tanto compuesto diario** que le produce.
b) La tasa anual equivalente **(TAE).**

Resolución:

a) Aplicando los datos a la expresión:

$$C_n = C_o(1 + i_k)^{n \cdot k}; \Rightarrow$$

$$2030445 = 2027730(1 + \mathrm{i}_{365})^4 \Rightarrow$$

$$\mathrm{i}_{365} = \sqrt[4]{\frac{2030445}{2027730}} - 1 = \left(\frac{2030445}{2027730}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0'000334566$$

El tanto diario es el 0'0334566%

b) Como los intereses se acumulan diariamente al capital, el TAE será:

$$i = (1 + i_{365})^{365} - 1 = (1 + 0'000334566)^{365} - 1 = 0'12986275 \Rightarrow 12'986275\%$$

Ejercicio 7º: Una supercuenta ofrece una remuneración del 8% anual y liquidación mensual. ¿Cuál es la tasa anual equivalente a la que resulta?

Resolución:

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0'08}{12}\right)^{12} - 1 = 0'082999 \Rightarrow 8'2999\% \cong 8'3\%$$

Es decir que es equivalente invertir un capital al 8% nominal capitalizable por meses que invertirlo al 8'3% efectivo anual.

Ejercicio 8: Una multicuenta ofrece una tasa anual efectiva del 12'5%. Si la liquidación es mensual, ¿cuál es el tanto mensual equivalente a la tasa dada?

Resolución:

Como debe cumplirse que: $(1+i) = (1+i_k)^k$

Resulta: $(1+0'125) = (1+i_{12})^{12}; \Rightarrow \mathrm{i}_{12} = (1'125)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0'00986 \Rightarrow 0'986\%$

que quiere decir que la supercuenta produce un 0'986% mensual, que es el tanto mensual equivalente al 12'5% efectivo anual.

Ejercicio 9º: Por una cuenta de crédito cuyo saldo medio dispuesto ha sido de 13.717.660 € durante 92 días, ha cobrado el banco entre intereses y comisiones 626890 € nuevos intereses.

a) ¿Cuál ha sido el ***tanto anual simple "y"*** al que ha resultado la cuenta?
b) Si la liquidación se hace trimestralmente, ¿cuál es la tasa anual equivalente (TAE) a la obtenida en el punto anterior?

Resolución:

a) Teniendo en cuenta que el tanto anual simple al que resulta la cuenta de crédito será aquel tanto ***"y"*** que aplicado al saldo medio durante los días que abarca la liquidación dé como resultado la suma de intereses más comisiones, resulta:

$$13717660 \cdot \frac{y}{100} \cdot \frac{92}{360} = 626890 \quad \textit{despejando } \mathrm{y}: \quad y = \frac{626890 \times 100 \times 360}{13717660 \times 92} = 17{,}88\ \%\ \textit{simple anual}$$

b) Si la liquidación se hace trimestralmente podemos considerar que ***"y"*** es el tanto nominal acumulable trimestralmente.

$$i = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0'1788}{4}\right)^4 - 1 = 0'191177 \Rightarrow 19'1177\%$$

La tasa anual equivalente a la que resulta la cuenta de crédito es del 19'12%.

Ejercicio 10º: Una entidad financiera concede un crédito de 6.010,12 €, a un plazo de 1 año. El tipo de interés del crédito es del 10% anual, realizándose el pago de los intereses a principio de cada trimestre. La entidad cobra una comisión de estudio de 150,25 €. Calcular el TAE de la operación.

Resolución:

a) Calculamos el importe de las liquidaciones trimestrales:

Se calcula el tipo de interés trimestral equivalente al 10% anual:

$$(1+i) = (1+i_2)^k \Rightarrow (1+i) = (1+i_2)^4 \Rightarrow \sqrt[4]{(1+i)} = (1+i_2) \Rightarrow (1+i)^{\frac{1}{4}} = (1+i_2)$$

$$i_2 = (1+0{,}10)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}024114 \Rightarrow 2{,}4114\%$$

Por lo tanto la liquidación trimestral será: I = 6.010,12 x 0,024114 luego, I = 144,93 €

b) Ya podemos detallar el flujo de la operación:

Se analiza la operación desde el punto de vista del cliente. Los importes que recibe van con signo positivo y los que paga con signo negativo.

Meses	Principal	Intereses	Comisiones
0	+6.010,12	-144,93	-150,25
3		-144,93	
6		-144,93	
9		-144,93	
12	-6.010,12		

c) Se calcula el tipo de interés que iguala el valor en el momento inicial de la prestación y de la contraprestación:

$$Calculo\ del\ tipo\ de\ interes\ efectivo:$$
$$6010{,}12=144{,}93+150{,}25+144{,}93\cdot(1+i_4)^{-1}+144{,}93\cdot(1+i_4)^{-2}+144{,}93\cdot(1+i_4)^{-3}+6010{,}12\cdot(1+i_4)^{-4}$$

$$\rightarrow\ 6010{,}12-144{,}93-150{,}25=144{,}93\cdot(1+i_4)^{-1}+144{,}93\cdot(1+i_4)^{-2}+144{,}93\cdot(1+i_4)^{-3}+6010{,}12\cdot(1+i_4)^{-4}$$

$$\rightarrow\ 5714{,}94=144{,}93\cdot(1+i_4)^{-1}+144{,}93\cdot(1+i_4)^{-2}+144{,}93\cdot(1+i_4)^{-3}+6010{,}12\cdot(1+i_4)^{-4}\ \rightarrow$$

$$5714{,}94=\frac{144{,}93}{(1+i_4)^1}+\frac{144{,}93}{(1+i_4)^2}+\frac{144{,}93}{(1+i_4)^3}+\frac{6010{,}12}{(1+i_4)^4}\ \rightarrow$$

$$5714{,}94=\frac{144{,}93}{1+i_4}\cdot\left(\frac{1}{(1+i_4)}+\frac{1}{(1+i_4)^2}\right)+\frac{6010{,}12}{(1+i_4)^4}\ \rightarrow$$

$$3305.57+\frac{3305{,}57}{1+i_2}=\frac{7212{,}15}{(1+i_2)^2}\ \rightarrow\ 3305.57=\frac{7212{,}15}{(1+i_2)^2}-\frac{3305{,}57}{1+i_2}\ \rightarrow$$

$$3305.57=\frac{7212{,}15-3305{,}57\cdot(1+i_2)}{(1+i_2)^2}\ \rightarrow$$

$$3305.57\cdot(1+i_2)^2=7212{,}15-3305{,}57\cdot(1+i_2)\ \rightarrow$$

$$3305.57\cdot(1+i_2)^2+3305{,}57\cdot(1+i_2)-7212{,}15=0\ \rightarrow$$

$$3305.57\cdot(1+2\cdot i_2+i_2^2)+3305{,}57+3305{,}57\cdot i_2-7212{,}15=0\ \rightarrow$$

$$3305.57+6611{,}14\cdot i_2+3305{,}57\cdot i_2^2+3305{,}57+3305{,}57\cdot i_2-7212{,}15=0\ \rightarrow$$

$$3305{,}57\cdot i_2^2+9916{,}71\cdot i_2-601{,}01=0\ \rightarrow\ ecuación\ de\ 2^o\ grado\ \rightarrow$$

$$\frac{-b\pm\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-9916{,}71\pm\cdot\sqrt{9916{,}71^2+4\times 3305{,}57\times 601{,}01}}{2\times 3305{,}57}\ \rightarrow\ 0{,}05943\ \ y\ \ -3{,}05943$$

$$de\ estos\ resultados\ el\ lógico\ es:\ 0{,}05943\ \ que\ es\ i_2\ trimestral$$

, 1.000.000 = 24.114 + 25.000 + 24.114 * (1 + i_4) ^-1 + 24.114 * (1 + i_4) ^-2+ 24.114 * (1 + i_4) ^-3 + 1.000.000 * (1 + i_4) ^-4
(la base temporal es el trimestre)
Despejando, i_4 = 3,1625 (i_4 es el tipo de interés efectivo trimestral)

d) Conocido el tipo de interés efectivo, se calcula su equivalente TAE:
Se aplica la fórmula, (1 + i) = (1 + i_4)^4 (donde i es el tipo TAE)
Luego, (1 + i) = (1 + 0,031625)^4
Luego, i = 13,26%

Por lo tanto, la tasa TAE de esta operación es el 13,26%

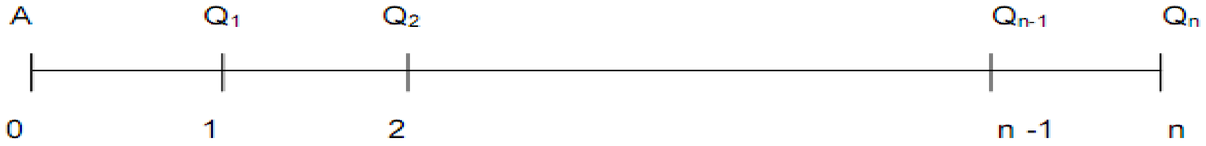
CRITERIOS DE SELECCIÓN DE INVERSIONES: EL VAN:

Para valorar las distintas alternativas de inversión, las empresas utilizan los criterios del Valor Actual Neto , la Tasa Interna de Rentabilidad y el Plazo de Recuperación.

Métodos estáticos y métodos dinámicos:

Los métodos de selección de inversiones son criterios valorativos de las distintas opciones de inversión que tiene la empresa y utilizan como variables el desembolso inicial (A), los pagos que surgirán de su funcionamiento, reparación y conservación, etc. así como de los cobros que se espera percibir generados por dicha inversión cuando este preste sus servicios en la empresa.

Puede representarse la corriente financiera de un proyecto de inversión de la siguiente manera:



A = Desembolso inicial de la inversión
Q_i = Flujos de caja (cobros — pagos)
n = Variable tiempo

Los distintos criterios incluyen o no el momento del tiempo en el que las inversiones obligarán a realizar los pagos y generarán los cobros a los que nos hemos referido anteriormente.

Se llaman **métodos estáticos** de selección de inversiones a aquellos criterios que ignoran la variable tiempo. Dentro de los métodos estáticos el más utilizado es el criterio del Plazo de Recuperación o Pay-back.

Se llaman métodos dinámicos de selección de inversiones a aquellos criterios que incluyen el tiempo como una variable a considerar. Dentro de los métodos dinámicos los más importantes son:

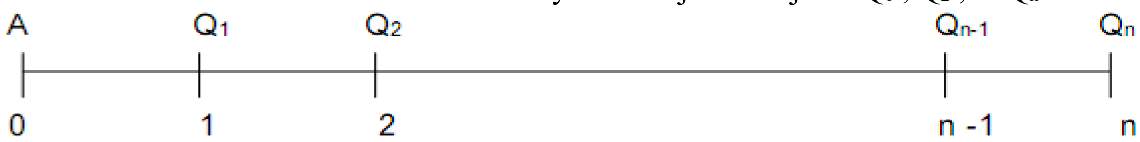
a) El criterio del Valor Actual Neto (VAN).
b) El criterio de la Tasa Interna de Rentabilidad (TIR).

Los métodos de selección dinámicos consideran muy importante el periodo en que se generan los flujos de caja, convirtiéndolos en valores equivalentes mediante un proceso de actualización financiera

El criterio del valor actual neto (VAN):

El criterio de selección de inversiones, método del Valor Actual Neto, nos permite determinar si una inversión en proyecto es o no efectuable, simplemente comparando el coste de adquisición o desembolso inicial de la misma con la suma de los flujos netos de caja, derivados de la inversión durante los períodos de vida útil de la misma, con la precaución de que deben expresarse en valores financieramente equivalentes en el periodo inicial de la inversión.

Para hacer equivalente los flujos de caja utilizaremos el siguiente proceso de actualización. Sea un proyecto con un desembolso inicial de A euros y unos flujos de caja de Q_1 , Q_2 ,… Q_n euros.



Estos flujos de caja se obtienen en diferentes años, por lo que no son valores equivalentes financieramente hablando. No es igual obtener flujos de caja positivos y elevados durante los últimos años, que durante los primeros años del proyecto de inversión, ya que la empresa podrá reinvertirlos y obtener mayores rendimientos a su dinero.

Además no contamos (para hacerlo más sencillo) con el efecto de pérdida de poder adquisitivo del dinero debido a la inflación. Si existe inflación los flujos de caja, obtenidos en los últimos años del proyecto, tendrán un valor depreciado por el efecto inflación, respecto a los obtenidos en los primeros años.

Recordemos, que si quisiéramos calcular en la capitalización compuesta, el valor actual "C_o" despejando de la expresión general:

$$C_n = C_o (1+i)^n ; \quad \Rightarrow \quad C_o = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$ También se puede expresar: $C_o = C_n (1+i)^{-n}$

<u>siendo</u> **$(1+i)^{-n}$** el **factor de actualización** en la capitalización compuesta y que servirá, por tanto, para trasladar capitales de un momento dado a otro anterior, es decir, para hacer traslaciones negativas de capital.

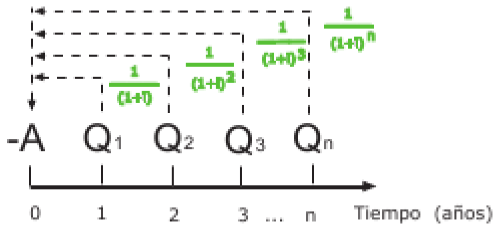
$$\frac{1}{(1+i)^n} \rightarrow Factor\ de\ actualización$$

Para transformar los flujos de caja obtenidos a lo largo del proyecto de inversión en valores equivalentes en el periodo de inicio de la inversión, dividimos cada flujo de caja por un factor de actualización y los sumamos, y obtenemos el **Valor Actual** de la inversión:

$$VA = \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

➔ **Valor actual neto (VAN):**

Mide cuánto vale un proyecto. Es la diferencia entre los flujos de tesorería del proyecto y la inversión inicial.



$$VAN = -A + \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Si el VAN es positivo, la inversión es realizable, porque nos indicaría que se espera obtener unos rendimientos netos actualizados mayores que los costes de la inversión o desembolso inicial; **si el VAN es negativo,** no debe realizarse (su coste es mayor de lo que se recupera). **Si el VAN fuera igual a cero,** significa que el coste de la inversión coincide con lo que se recupera. Por tanto:

- Si el VAN > 0 → interesa la inversión.
- Si el VAN < 0 → no interesa la inversión.
- Si el VAN = 0 → es indiferente.

➔ **Proceso del cálculo del VAN**

1) Predecir los flujos de tesorería (cash flows) del proyecto.

2) Estimar el coste del capital.

3) Actualizar los flujos utilizando el coste de capital.

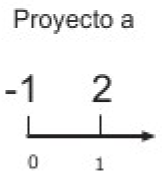
4) Realizar el proyecto si el VAN > 0

➔ **Existencia de varias alternativas:**

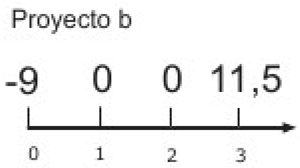
Cuando exista varias alternativas con VAN > 0, será preferible la que tenga un VAN superior, porque eso significa que con ella se obtiene el mayor rendimiento.

El criterio del VAN es selecciona aquellos proyectos con resultado positivo, y si existe limitación de fondos, el que tiene un VAN mayor.

Supongamos dos proyectos y un coste de capital del 5%:.



$$VAN_A = -A + \frac{C_1}{(1+i)^1} = -1 + \frac{2}{(1+0{,}05)^1} = 0{,}90\ €$$



$$VAN_B = -A + \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} =$$
$$-9 + \frac{0}{(1+0{,}05)^1} + \frac{0}{(1+0{,}05)^2} + \frac{11{,}5}{(1+0{,}05)^3} = 0{,}93\ €$$

Según el criterio del VAN ambos proyectos son realizables (VAN > 0) y en caso de restricción de fondos, sería preferible el B ($VAN_B > VAN_A$).

Sin embargo el sentido común nos hace plantearnos dudas:

- La rentabilidad del primer proyecto es mucho mayor (se invierte 1 € y se obtiene un VAN de 0,90 €) que en el segundo (se invierte 9 € y se obtiene un VAN de 0,93 €).
- El plazo del segundo es mucho mayor (3 periodos), por lo que la incertidumbre aumenta.

LA TASA INTERNA DE RENTABILIDAD (TIR):

Mide la rentabilidad del proyecto. $Rentabilidad=\dfrac{Beneficios}{Inversión}$

➔ **Tasa interna de rentabilidad de una inversión (TIR)**: Representa la ganancia obtenida por cada euro invertido en un proyecto.

Se obtiene como aquel valor de **(k)** o tipo de actualización que hace que el **VAN** sea igual a cero.

Según este criterio, el requisito para que la inversión sea factible es que su valor sea superior al coste del dinero o tipo de interés del mercado

Si un proyecto requiere una inversión de 1000 € y genera en un año un beneficio de 100 € (Q1-A) , su TIR= 10%. Pero si el proyecto genera flujos de caja en distintos periodos, el cálculo se complica:será el tipo de descuento que hace el VAN=0.

➔ **No hay un método simple para despejar la TIR, por lo que se emplean hojas de cálculo, o pesados sistemas manuales de "tanteo".**

$$VAN=0 \ \rightarrow \ -A+\frac{C_1}{(1+TIR)^1}+\frac{C_2}{(1+TIR)^2}+\frac{C_3}{(1+TIR)^3}+...+\frac{C_n}{(1+TIR)^n}=0$$

$$VAN=0 \ \rightarrow \ -A+\frac{C_1}{(1+k)^1}+\frac{C_2}{(1+k)^2}+\frac{C_3}{(1+k)^3}+...+\frac{C_n}{(1+k)^n}=0$$

➔ **Proceso del cálculo del TIR:**

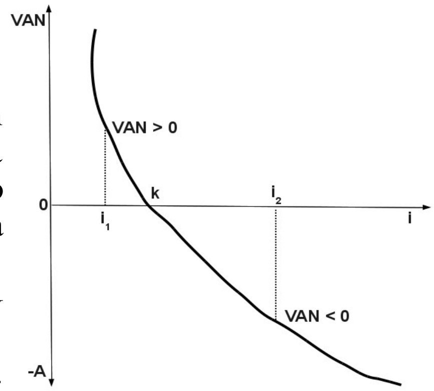
1) Igualar el VAN a cero, manteniendo como incógnita la tasa de descuento (en este caso k).
2) Despejar el TIR = k.
3) Comparar el TIR con el coste de capital del mercado (i).
4) Realizar el proyecto si el TIR > i, es decir: k > i

➔ **Resultado:**

- Si k > i → interesa la inversión.
- Si k < i → no interesa la inversión.
- Si k = i → es indiferente..

➔ **Si hay que seleccionar uno entre varios proyectos, se elegirá aquel que presenta una TIR mayor.**

■ La relación entre el VAN y la TIR:



La gráfica de la derecha nos indica cómo varía el VAN en función del factor de actualización (i) elegido en el proyecto. Para cada valor de **i,** obtenemos un valor diferente del **VAN;** y solo existe un valor **i (i = k)** que hace el **VAN = 0;** este valor **k** será la **TIR** (Tasa interna de rentabilidad del proyecto).

La función es decreciente: a medida que aumenta i, el VAN es menor:

- Si k > i (por ejemplo i_1) → el VAN es positivo: interesa la inversión.
- Si k < i (por ejemplo i_2) → el VAN es negativo: no interesa la inversión.
- Si k = i el VAN se hace 0: la inversión es indiferente.
- Para un valor de i = ∞ → la función del VAN tiende al valor -A

➔ **Para una inversión de dos años de duración el calculo del TIR se hace por resolución de ecuaciones de segundo grado:**

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4*a*c}}{2a}$$

<u>Ejemplo 1º</u>: Una inversión cuyo desembolso inicial es de 400.000 euros, con una duración de 2 años y unos flujos de caja de 150.000 y 300.000 euros, respectivamente. Calcular su tasa de rentabilidad interna TIR: Para calcular la TIR del proyecto (-40 / 15 /30):

$$-A+\frac{C_1}{(1+k)^1}+\frac{C_2}{(1+k)^2}=0 \ \rightarrow\ -40+\frac{15}{(1+k)^1}+\frac{30}{(1+k)^2}=0 \ \rightarrow$$

$$\textit{Multiplicamos ambos miembros por } (1+k)^2 \ \rightarrow -40(1+k)^2+\frac{15(1+k)^2}{(1+k)^1}+\frac{30(1+k)^2}{(1+k)^2}=0$$

$$\textit{simplificamos} \ \rightarrow\ -40(1+k)^2+\ 15(1+k)+30=0 \ \ \textit{hacemos el cambio} \ \ (1+k)=x \ \rightarrow$$

$$-40x^2+15x+30=0 \ \rightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4*a*c}}{2a}=\frac{-15\pm\sqrt{15^2-4*(-40)*30}}{2(-40)} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \frac{-15+\sqrt{225+4800}}{-80}=\frac{-15+\sqrt{5025}}{-80}=\frac{-15+70{,}89}{-80}=-0{,}699$$

$$\rightarrow\ \frac{-15-\sqrt{225+4800}}{-80}=\frac{-15-\sqrt{5025}}{-80}=\frac{-15-70{,}89}{-80}=1{,}074$$

Como vemos, resolviendo la ecuación, se obtiene dos valores, descartamos el negativo y nos queda: $x=1{,}074$ *como* $x=(1+k) \rightarrow 1{,}074=(1+k) \rightarrow k=1{,}074-1=0{,}074$ *es decir: una rentabilidad del* 7,4%

<u>Ejemplo 2º</u>: Una inversión cuyo desembolso inicial es de 54.000 euros, con una duración de 2 años y unos flujos de caja de 30.000 y 40.000 euros, respectivamente. Calcular su tasa de rentabilidad interna TIR: Para calcular la TIR del proyecto (-54 / 30 /40):

$$-A+\frac{C_1}{(1+k)^1}+\frac{C_2}{(1+k)^2}=0 \ \rightarrow\ -54+\frac{30}{(1+k)^1}+\frac{40}{(1+k)^2}=0 \ \rightarrow$$

$$\textit{Multiplicamos ambos miembros por } (1+k)^2 \ \rightarrow -54(1+k)^2+\frac{30(1+k)^2}{(1+k)^1}+\frac{40(1+k)^2}{(1+k)^2}=0$$

$$\textit{simplificamos} \ \rightarrow\ -54(1+k)^2+\ 30(1+k)+40=0 \ \ \textit{hacemos el cambio} \ \ (1+k)=x \ \rightarrow$$

$$-54x^2+30x+40=0 \ \rightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4*a*c}}{2a}=\frac{-30\pm\sqrt{30^2-4*(-54)*40}}{2(-54)} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \frac{-30+\sqrt{900+8640}}{-108}=\frac{-30+\sqrt{9540}}{-108}=\frac{-30+97{,}67}{-108}=-0{,}6266$$

$$\rightarrow\ \frac{-30-\sqrt{900+8640}}{-108}=\frac{-30-\sqrt{9540}}{-108}=\frac{-30-97{,}67}{-108}=1{,}1821$$

Como vemos, resolviendo la ecuación, se obtiene dos valores, descartamos el negativo y nos queda: $x=1{,}1821$ *como* $x=(1+k) \rightarrow 1{,}1821=(1+k) \rightarrow k=1{,}1821-1=0{,}1821$ *es decir: una rentabilidad del* 18,21%

CRITERIOS ESTÁTICOS DE SELECCIÓN DE INVERSIONES:

■ **Introducción:**

LA AMORTIZACIÓN DE LAS INVERSIONES:

■ **Introducción:**

EL SISTEMA FINANCIERO: LOS ACTIVOS FINANCIEROS:

■ **Introducción:**

EL SISTEMA FINANCIERO: MERCADOS E INTERMEDIARIOS:

■ **Introducción:**